

Eksempler på oppgaver og teknikker

Teknikker:

- Faktorisering og produktsetning. (*Ikke glem denne!*)
- Konjugatsetning
- Substitusjon (f.eks. $u = \tan x$ i andregradsligninger)
- Trigonometriske omforminger med:
 - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 - $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
 - $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
 - $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 - $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

1) Faktorisering og produktregel:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cos(x) + \sin(x) &= 0, & x \in [0, 2\pi) \\ \sin(x)(\cos(x) + 1) &= 0 & \sin x \text{ felles faktor!} \\ \sin(x) = 0 \vee \cos(x) &= -1 \\ x = 0 \vee x &= \pi \end{aligned}$$

2) Omforming av $\tan(x)$:

$$\begin{aligned} \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} &= 0, & x \in [0, 2\pi) \\ \frac{\sin(x)+1}{\cos(x)} &= 0 & \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}! \\ \cos(x) \neq 0 &\text{ gir:} \\ \sin(x) &= -1 \\ \text{Ingen l\u00f8sning, da } x &= \frac{3\pi}{2} \text{ gir } \cos(x) = 0 \end{aligned}$$

3) Omforming av $\tan x$ og fellesnevner:

$$\begin{aligned} \tan^2(x) + \sin(x) &= 0, & x \in [0^\circ, 360^\circ) \\ \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)\cos^2(x)}{\cos^2(x)} &= 0 \\ \frac{\sin^2(x)+\sin(x)(1-\sin^2(x))}{\cos^2(x)} &= 0 \\ \frac{\sin^2(x)+\sin(x)-\sin^3(x)}{\cos^2(x)} &= 0 & \text{Ikke multipliser ut f\u00f8r du har faktorisert!} \\ \frac{\sin(x)[- \sin^2(x)+\sin(x)+1]}{\cos^2(x)} &= 0 & \sin x \text{ er felles faktor!} \\ \cos(x) \neq 0 &\text{ gir:} \\ \sin(x) = 0 \vee \sin(x) &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee \sin(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = 0^\circ \vee x = 180^\circ \vee x &= 218^\circ \vee x = 322^\circ \end{aligned}$$

4) Omforming av $\tan x$, konjugatsetning:

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2(x) &= 4 \sin^2(x), & x \in [0^\circ, 360^\circ) \\ \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} &= 4 \sin^2(x) \\ \frac{1}{\cos^2(x)} &= 4 \sin^2(x) \\ \cos(x) \neq 0 &\text{ gir:} \\ 4 \sin^2(x) \cos^2(x) - 1 &= 0 & \text{Faktoriser med konjugatsetning!} \\ (2 \sin(x) \cos(x) + 1)(2 \sin(x) \cos(x) - 1) &= 0 \\ (\sin(2x) + 1)(\sin(2x) - 1) &= 0 \\ \sin(2x) = -1 \vee \sin(2x) &= 1 \\ 2x = 180^\circ + k360^\circ \vee 2x &= 90^\circ + k360^\circ \end{aligned}$$

$$x = 90^\circ + k180^\circ \vee x = 45^\circ + k180^\circ$$

$$x = 45^\circ \vee x = 225^\circ$$

5) Omforming med $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$:

$$1 + \tan^2(x) = 4 \sin^2(x) \quad , \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 4 \sin^2 x$$

o.s.v. som i eksempel 4).

6) Omforminger med $\cos 2x$ og $\sin 2x$:

$$\sin(2x) + 2 \sin(x) = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi)$$

$$2 \sin x \cos x + 2 \sin x = 0$$

$$\sin x \cos x + \sin x = 0$$

Videre som i eksempel 1).

7) Substitusjon:

$$\tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0, \quad u = \tan x$$

$$u = 1 \vee u = 2$$

$$\tan x = 1 \vee \tan x = 2$$

$$x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \vee x = 1.11 \vee x = 1.11 + \pi = 4.25$$

8) Omforming med $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\sin^2 x - \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

$$\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - \frac{1}{2} = 0$$

$$2 \sin^2 x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$$

9) Omforming med $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$$\cos 2x + \cos x = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

$$2 \cos^2 x - 1 + \cos x = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$2u^2 + u - 1 = 0, \text{ Solution is: } -1, \frac{1}{2}$$

$$, \quad u = \cos x$$

$$u = -1 \vee u = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1 \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pi \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$$

10) $a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos^2 x = 0$ og

$$a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos^2 x = d$$

$$a \sin^2 x + \frac{b}{2} \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

$\cos x \neq 0$ gir:

$$a \tan^2 x + \frac{b}{2} \tan x + c = 0$$

Dividerer med $\cos^2 x$.

Substitusjonen $u = \tan x$ ordner resten.

Med konstant på høyre side i ligningen gjør vi:

$$a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos^2 x = d$$

$$a \sin^2 x + \frac{b}{2} \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$(a - d) \sin^2 x + \frac{b}{2} \sin x \cos x + (c - d) \cos^2 x = 0$$

$\cos x \neq 0$ gir:

$$(a - d) \tan^2 x + \frac{b}{2} \tan x + (c - d) = 0$$

Substitusjonen $u = \tan x$ ordner resten.