Litt om ligningsløsning

Operasjoner og løsningsmengder

Å løse en ligning vil si å omforme en ligning på en måte som (helst) bevarer løsningsmengden.

Operasjoner som bevarer løsningsmengden:
- Addere og subtrahere samme tall på begge sider på begge sider av ligningen.
- Multiplisere og dividere med samme tall på begge sider av ligningen.

  Obs: Med "tall" mener jeg her konstanter, ikke uttrykk som inneholder den uavhengige variabelen x!

Operasjoner som utvider løsningsmengden (gir falske løsninger):
- Multiplikasjon med noe som inneholder variabelen. (Bør aldri gjøres, aldri nødvendig!)
- Kvadrering av ligning. (Må gjøre når vi har kvadratrot (irrasjonelle ligninger))

Eksempler:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$
$L_1 = \{-1, 1\} \quad \subset \quad L_2 = \{-1, 0, 1\}$ Har fått falsk løsning $x = 0$!

$\sqrt{3 - 2x} = x \Rightarrow 3 - 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$
$L_1 = \{1\} \quad \subset \quad L_2 = \{-3, 1\}$ Har fått falsk løsning $x = -3$!
I slike ligninger må vi alltid sjekke om løsningene passer i den opprinnelige ligningen!
($x = -3$ gir venstre side: $\sqrt{9} = 3$ og høyre side: -3 og kan derfor ikke være løsning.)

Operasjoner som innskrenker løsningsmengden (mister løsninger):
- Divisjon med noe som inneholder variabelen. (Bør ikke gjøres, sjelden nødvendig!)

Eksempel:

$x^3 - x = 0 \Leftarrow x^2 - 1 = 0$
$L_1 = \{-1, 0, 1\} \quad \supset \quad L_2 = \{-1, 1\}$ Har mistet løsningen $x = 0$!

Betingelser/forutsetninger

Vi har en del tilfeller der løsninger må forkastes, fordi de strider mot forutsetninger i den opprinnelige ligningen:
- Ikke null i nevner
- Ikke negativt tall under kvadratrot
- I ligninger med $\tan x$ må vi forutsette $\cos x \neq 0$ ($\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)

Eksempler:

$\frac{x^2-3x+2}{x-1} = 0$ Må forutsette $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$
Teller: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$
Må forkaste $x = 1$ og får løsningsmengden $L = \{2\}$

$\sqrt{3 - 2x} = x$ Må forutsette $3 - 2x \geq 0$ og $x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{2}$
Kvadrering (se lenger opp) gir:
$3 - 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$
Må forkaste $x = -3$ og får løsningsmengden $L = \{1\}$

Oversikt over løsningsmetoder

Bruker her vanlige ligninger med x, men metodene vil fortsatt være aktuelle hvis x erstattes med f.eks. $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ o.s.v.

Direkte løsning:

$$3x - 2 = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17+2}{3} = \frac{19}{3}$$

Faktorisering og produktregelen:

Viktigste teknikk av alle! Mange av de andre teknikkene er utledet ut fra dette!

$$(x^5 - 3x^2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3-3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{3} \vee x = 2$$

Andregradsformel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0 \Leftrightarrow a[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2] = 0 \Leftrightarrow$$
$$a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2] = 0 \Leftrightarrow a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}})^2] = 0 \Leftrightarrow$$
$$a[((x + \frac{b}{2a}) + \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}})((x + \frac{b}{2a}) - \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}})] = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}} \vee x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}} \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Vi ser at selv annengradsformelen er utledet v.h.a. faktorisering, kvadratsetninger og produktregelen.

Andre varianter

Felles brøkstrek:

$$x + \frac{1}{x} + 2 = 0, \qquad x \neq 0$$
$$\frac{x^2+2x+1}{x} = 0$$
$$\frac{(x+1)^2}{x} = 0$$
$$L = \{-1\}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = e \qquad , cx + d \neq 0$$
$$\frac{ax+b}{cx+d} - e = 0$$
$$\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{e(cx+d)}{cx+d} = 0$$
$$\frac{ax+b-ecx-ed}{cx+d} = 0$$
$$\frac{(a-ec)x-(ed-b)}{cx+d} = 0$$
$$L = \{\frac{de-b}{a-ce}\}$$ (Husk å sjekke forutsetning.)

(Noen liker å multiplisere med $cx + d$ på begge sider, men man bør unngå å multiplisere med noe som inneholder variabelen x!

Faktorisere ut en kjent løsning v.h.a. polynomdivisjon:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

De fleste kan ikke formelen for 3de-gradsligninger i hodet, men her ser vi relativt lett at $x = 1$ er en løsning (ved innsetting). Da må vi ha venstresiden være delelig med $(x-1)$:

$$x^3 - x^2 - x + 1 : x - 1 = x^2 - 1$$

Vi får:

$(x^2-1)(x-1) = 0$ og løsningsmengde $L = \{-1, 1\}$

Innføring av ny variabel ($u = x^2$):

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 3(x^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \vee x = \pm\sqrt{2}$$

Trigonometriske omforminger:

I kapittel 3 har vi mange formler for å omforme til et av tilfellene over,

men, *sjekk alltid om du ikke rett og slett kan faktorisere først!*

Gjøre om alt til enten sinus, cosinus eller tangens:
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1 \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$
-

Skifte fra $2x$ til x eller omvendt (eller fra x til $\frac{x}{2}$ og omvendt):
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
- $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Andre morsomme triks:

$a\sin kx + b\cos kx = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(kx+\phi) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(kx-\varphi)$
der $\tan\phi = \frac{b}{a}$ og $\tan\varphi = \frac{a}{b}$. (Pass på at disse er i riktig kvadrant!)

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$
Forutsetter vi $\cos x \neq 0$ og dividerer med $\cos^2 x$:
$a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{d}{\cos^2 x}$

$a\tan^2 x + b\tan x + c = \frac{d}{\cos^2 x}$
Ser lovende ut, annengradsligning i $\tan x$, bortsett fra nevneren på høyre side.
Bruker $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 + 1$:
$a\tan^2 x + b\tan x + c = d(\tan^2 x + 1)$
$(a-d)\tan^2 x + b\tan x + (c-d) = 0$
og har fått en annengradsligning i $\tan x$. Til slutt må vi selvsagt sjekke om $\cos x \neq 0$!

Denne metoden fungerer selvsagt også på enklere varianter:
$a\sin^2 x + b\cos^2 x = c$