R1 - Eksamen H10 - 30.11.2010

Løsningsskisser

Del 1

Oppgave 1

a)
1) Produktregel: $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1+x)$

2) Kjerneregel: $g(x) = 3\sqrt{u}, \quad u = x^2 - 1$

$g'(x) = 3\frac{1}{2\sqrt{u}}2x = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$

b)
$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 2 - 6 - 2 + 6 = 0$

Trenger ikke polynomdivisjon, kan faktorisere direkte:
$2x^2(x-3) - 2(x-3) = (2x^2-2)(x-3) = 2(x^2-1)(x-3) = 2(x-1)(x+1)(x-3)$

Men, når oppgaven ber om polynomdivisjon, så må vi nesten gjøre det:

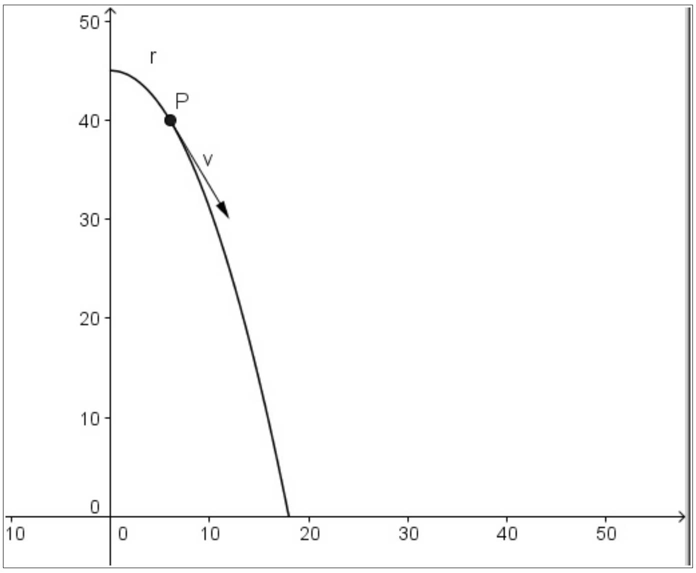
$P(1) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x-1)Q(x)$

$$
\begin{array}{llll}
2x^3 & -6x^2 & -2x & +6 \;=\; (x-1)(\;\; 2x^2 \;\; -4x \;\; -6) \\
2x^3 & -2x^2 & & \\
 & -4x^2 & -2x & \\
 & -4x^2 & +4x & \\
 & & -6x & +6 \\
 & & -6x & +6
\end{array}
$$

$P(x) = 2(x-1)(x^2-2x-3) = 2(x-1)(x+1)(x-3)$

Løsninger: $x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$

c)
$\vec{r}(t) = [6t, -5t^2 + 45], \quad t \in [0,3]$
1) Graf ut fra utregning av $\vec{r}(t)$ for noen velvalgte t...
(Kan eventuelt eliminere t og får da: $t = \frac{x}{6}$ som gir $y = -5(\frac{x}{6})^2 + 45$
altså en parabel med toppunkt når $x = 0$ og som skjærer x –aksen når $x = 18$.)



2)
$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = [6, -10t]$
$t = 1 :$ $\vec{r}(1) = [6, 40]$, $\vec{v}(1) = [6, -10]$

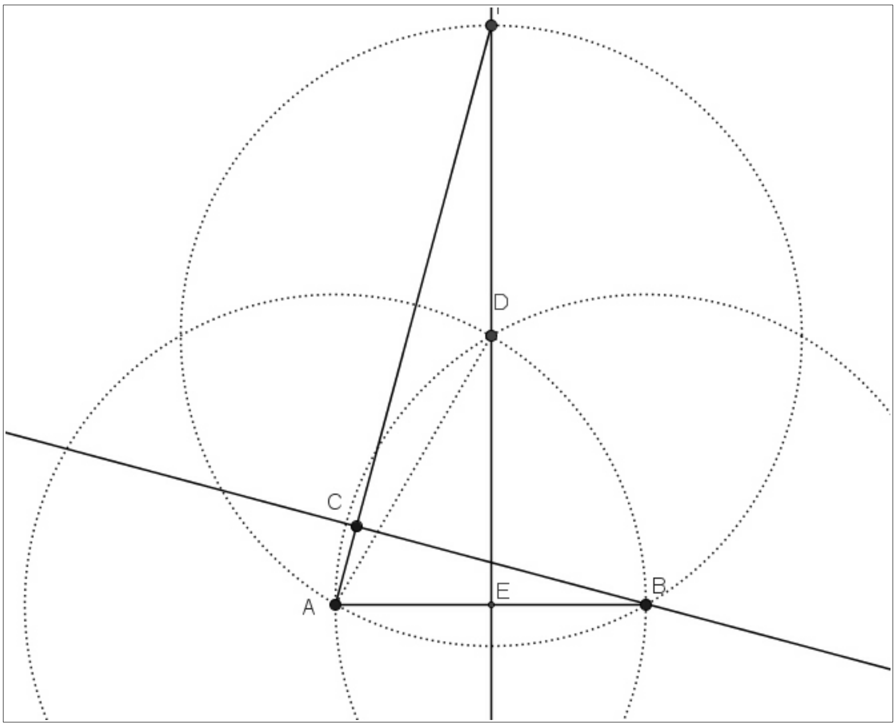
3)
$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = [0, -10]$ Akselerasjonsvektoren er konstant og loddrett.

d)
Hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling med X: antall jenter:
$P(X = x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{6}{2-x}}{\binom{10}{2}}$ $P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2-1}}{\binom{10}{2}} \approx 0.533$

e)
Flere muligheter her:

Konstruere 15° ved å konstruere 60° og halvere to ganger.
Kan da sette av linjestykket AB, legge BC slik at $\angle B = 15^\circ$. ($\angle B = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$)
C finnes som skjæringspunkt mellom BC –linjen og sirkel med sentrum midt på AB, da $\angle C = 90^\circ$ og derfor ligger på en Thales-sirkel.

En litt mer elegant løsning: (Færre hjelpelinjer og konstruksjonstrinn.)



1 Konstruerer linjestykke AB.
2 Slår sirkel med radius lik AB om både A og B, får da skjæringspunkt D og ABD blir da en likesidet trekant med 60 graders vinkler.
3 Konstruerer normal fra D ned på AB og slår sirkel med radius lik DA om D og får da et skjæringspunkt F.
ADF er da likebenet og $\angle DAF = \angle DFA = 15^\circ$, da $\angle ADE = \frac{60}{2}^\circ = 30^\circ$, og $\angle ADF = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.
$\angle A = \angle BAF$ blir da de ønskede $60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$.
4 C finnes til slutt ved å konstruere en normal fra B ned på AF.

f)
1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x-2}$ eksisterer ikke, da teller blir 8 og nevner blir 0.
$(x \to 2 \Rightarrow \frac{x^2+4}{x-2} \to \pm\infty)$

2) Her får vi null i både teller og nevner, så dette ubestemte uttrykket må undersøkes nærmere med faktorisering:
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Oppgave 2

a)
AT tangent til sirkel:
$AT \perp ST$
AST blir rettvinklet trekant med sider:
$AT = x$, $AS = AB + BS = y + r$ og $ST = r$

Pythagoras gir da:
$$AS^2 = AT^2 + ST^2 \Leftrightarrow (y+r)^2 = x^2 + r^2 \Leftrightarrow$$
$$y^2 + 2yr + r^2 = x^2 + r^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 + 2yr \Leftrightarrow$$
$$x^2 = y(y+2r) \qquad QED$$

b)
CST er likebenet ($SC = ST = r$), så $\angle SCT = \angle STC = 30^\circ$
Vinkelsummen i CST gir da $\angle CST = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.
Da blir $\angle BST = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ og igjen $\angle SAT = 30^\circ$.

$\angle AST$ er sentralvinkel til periferivinkelen $\angle SCT = 30^\circ$, så
$\angle AST = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$

Da blir $\angle SAT = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (i trekanten SAT.)

CAT er da også likebenet ($TC = TA = x$)
SBT er også likebenet ($SB = ST$), så $\angle SBT = \angle STB$.
Dermet er SBT også likesidet og hele figuren blir symmetrisk
om en normal fra T ned på CB.
Derfor blir $BA = CS = r$ eller $y = AB = CS = r$ *QED*

Kommentar:

(Se også oppgave 681 i Aschehougs R1 læreverk.)
Denne oppgaven er et eksempel på en svært nyttig setning om det såkalte
"Punktets Potens".
Hvis vi trekker linjer gjennom A som skjærer en sirkel vil produktet av
avstandene til disse to skjæringspunktene være det samme for alle slike linjer!
Dette produktet kaller vi punktet As potens med hensyn på sirkelen.
(En tangent blir et spesialtilfelle der punktets potens blir kvadratet av avstanden
til tangeringspunktet.)
I dette tilfellet har vi da direkte:
Punktet As potens: $AB \cdot AC$ (linjen AC)
Men også: AT^2

Setningen sier da: $AT^2 = AB \cdot AC$
Og dette gir svaret på a) direkte: $x^2 = y(y + 2r)$

Del 2

Oppgave 3

a)
(Først kjerneregel på e^{-x}: $(e^u)' = e^u u' = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$)
Produktregel med $u = 4x^2$ og $v = e^{-x}$
$f'(x) = 8xe^{-x} + 4x^2(-e^{-x}) = 8xe^{-x} - 4x^2 e^{-x}$
Se graf lenger ned.
b)
Nullpunkter for $f'(x)$; 0 og 2, gir ekstremalpunktene:

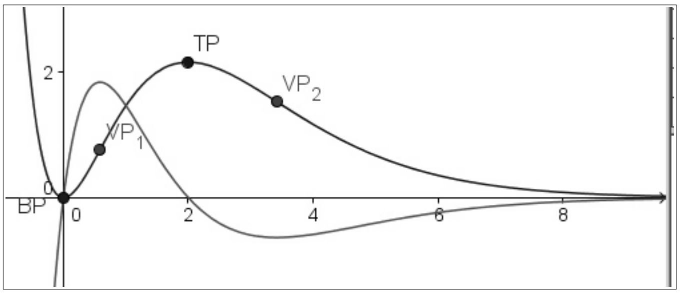
$BP = (0, f(0)) = (0, 0)$
$TP = (2, f(2)) = (2, 16e^{-2}) \approx (2, 2.17)$

Vendepunktene til $f(x)$ er når $f'(x)$ har topp- og bunnpunkter.
Sparer litt tid ved å legge inn
Y2=8Xe ^(-X)-4X ^2e ^(-X) på lommeregner og bruke

CALC,maximum og CALC,minimum på grafen til Y2 (=$f'(x)$)

Får da:

$VP_1 = (0.5858, f(0.5858)) \approx (0.586, 0.764)$
$VP_2 = (3.414, f(3.414)) \approx (3.41, 1.53)$



(Ved regning: (Men med såpass mange oppgaver ville jeg ikke gjort dette på eksamen...)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8xe^{-x} - 4x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 4e^{-x}x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$BP = (0,0)$ og $TP = (2, 4 \cdot 2^2 e^{-2}) = (2, \frac{16}{e^2}) = (2, (\frac{4}{e})^2)$

$f''(x) = 8e^{-x} + 8x(-e^{-x}) - (8xe^{-x} + 4x^2(-e^{-x})) = 8e^{-x} - 8xe^{-x} - 8xe^{-x} + 4x^2e^{-x} =$
$4e^{-x}(2 - 4x + x^2)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \vee x = 2 + \sqrt{2}$
$VP_1 = (2 - \sqrt{2}, f(2 - \sqrt{2})) \approx (0.586, 0.764)$
$VP_2 = (2 + \sqrt{2}, f(2 + \sqrt{2})) \approx (3.41, 1.53)$)

Oppgave 4

a)

Høyd***en*** i *ABP*??? Det er tre høyder i en trekant...Men, vi skjønner jo hva de mener:

$ABP = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{ah}{2}$
$PCD = \frac{CD \cdot (a-h)}{2} = \frac{a(a-h)}{2}$

b)

$A = ABP + PCD = \frac{ah}{2} + \frac{a(a-h)}{2} = \frac{ah + a^2 - ah}{2} = \frac{a^2}{2}$

Summen av arealene til de to trekantene er altså halvparten av arealet til kvadratet *ABCD*, uansett hvor *P* ligger inne i kvadratet.

Oppgave 5

a)

$\overrightarrow{AB} = [7 - (-1), -2 - 0] = [8, -2]$
$\overrightarrow{AC} = [3 - (-1), 6 - 0] = [4, 6]$

$\cos \angle A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{[8,-2] \cdot [4,6]}{\sqrt{8^2+2^2}\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{20}{\sqrt{68}\sqrt{52}} \approx 0.3363$
$\angle A = 70.3^\circ$

b)
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}([4,6] - [8,-2]) = \frac{3}{4}[-4,8] = [-3,6] \quad QED$

$\overrightarrow{BC} = [3-7, 6-(-2)] = [-4,8] = -4[1,-2]$
$\overrightarrow{DE} = [-3,6] = -3[1,-2]$
Vektorene er parallelle, fordi begge er parallelle har samme retning som vektoren $[1,2]$.

(Kan også argumentere rent geometrisk:
$ABC \sim ADE$ fordi forholdstallene mellom tilsvarende sider er $\frac{3}{4}$.)

c)
Her er det enklest å bruke det geometriske argumentet fra b), på den annen side må vi regne ut noen vektorer for d) og e) uansett, så:
$\overrightarrow{AB} = [7-t,-2]$, $\overrightarrow{AC} = [3-t,6]$, og fortsatt har vi $\overrightarrow{BC} = -4[1,-2]$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}([3-t,6] - [7-t,-2]) =$
$\frac{3}{4}[-4,8] = -3[1,-2]$

): Samme lengde som i b), da t faller bort i utregningen.

d) $\angle A = 90^\circ$ når $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow [7-t,-2] \cdot [3-t,6] = 0 \Leftrightarrow$
$(7-t)(3-t) - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 9$

e)
$\angle B$ blir 90° når $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow [t-7,2] \cdot [-4,8] = 0 \Leftrightarrow$
$-4t + 28 + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 11$

$\angle C$ blir 90° når $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow [4,-8] \cdot [t-3,-6] = 0 \Leftrightarrow$
$4t - 12 + 48 = 0 \Leftrightarrow t = -9$

Oppgave 6

Alternativ 1

a)
Pythagoras på ABC: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
Pythagoras på ACG: $AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{\sqrt{8}^2 + 2^2} = \sqrt{8+4} =$
$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

b)
Pythagoras på APE: $AP = \sqrt{AE^2 + EP^2} = \sqrt{2^2 + (2-x)^2}$
Pythagoras på PFG: $PG = \sqrt{PF^2 + FG^2} = \sqrt{x^2 + 2^2}$

$s(x) = AP + PG = \sqrt{2^2 + (2-x)^2} + \sqrt{x^2 + 2^2} \quad QED$

c)
På lommeregner:
Y1=√ (4+(2-X) ^2)+√ (X ^2+4)

GRAPH og CALC, minimum gir punktet $(1.00, 4.47)$

): Korteste strekning blir altså ca. 4.47.

d)
Etter å ha svingt opp lokket får vi en rettvinklet trekant ABG,
når AG er en rett linje som er den korteste veien mellom de to punktene
A og G.
Pythagoras gir da:
$AG = \sqrt{AB^2 + BG^2} = \sqrt{2^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$

Tegn figur!

Alternativ 2

La oss definere M som midtpunkt i mangekanten.
ABM, BCM, CDM, DEM, EFM og FAM er da alle likesidede trekanter med alle hjørnevinkler lik 60°.
Se figur lenger ned!

Symmetri gir: $\angle GBC = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

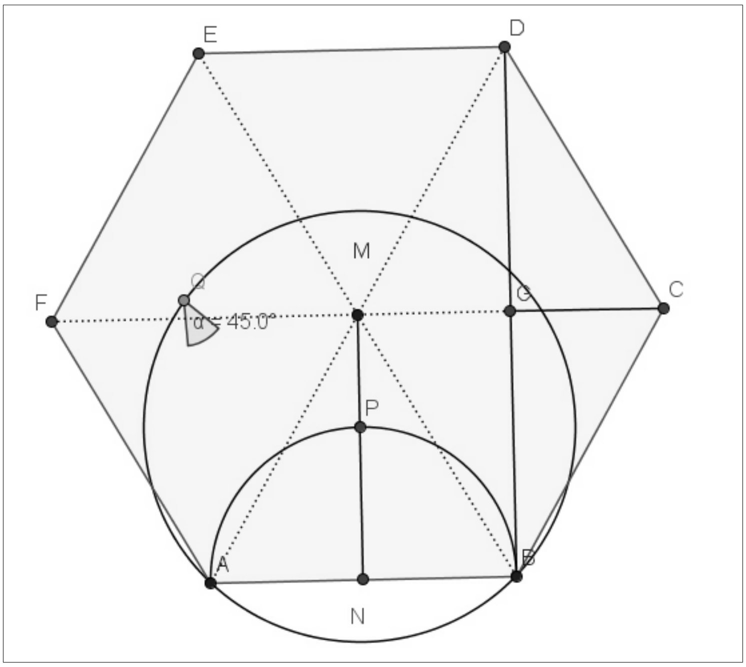
Da blir $GC = BC \sin 30^\circ = BC \cdot \frac{1}{2} = 8$ [m]
Pythagoras gir: $BG = \sqrt{BC^2 - GC^2} = \sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3}$

$BD = 2BG = 16\sqrt{3} \approx 27.7$

b)
α er i alle hjørnene en periferivinkel til sentralvinkelen $\angle AMB = 60^\circ$,
så $\alpha = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

c)
Thales sier oss at alle seteplasseringer på en halvsirkel med AB som diameter
har $\alpha = 90^\circ$. Konstrueres som halvsirkel om et sentrum funnet som midtpunkt
på AB, N i figuren lenger ned.

d)
Lager vi en sirkel med sentrum i punktet P, som er midt på sirkelbuen i c),
så vet vi at $\angle APB$ er en sentralvinkel med 90°i denne sirkelen.
Alle punkter Q på denne sirkelbuen (på salsiden av senen) har da α som
tilsvarende periferivinkel, $\alpha = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.



Oppgave 7

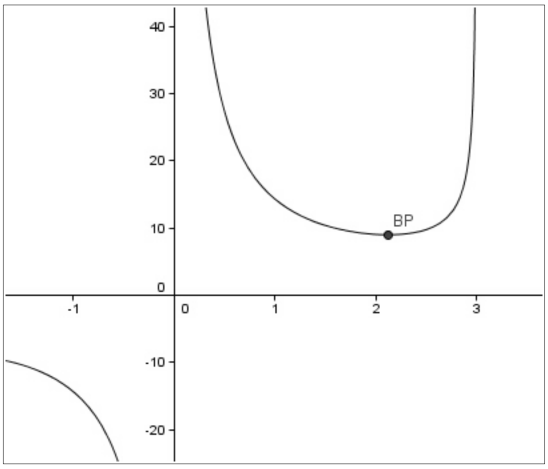
a)
Tangent: $\quad y = \frac{1}{\sqrt{9-a^2}}(9 - ax)$
Skjæring y –akse:
$x = 0$ gir: $\quad y = \frac{-a}{\sqrt{9-a^2}}0 + \frac{9}{\sqrt{9-a^2}} = \frac{9}{\sqrt{9-a^2}}$
): $\quad B = (0, \frac{9}{\sqrt{9-a^2}})$

Skjæring x –akse:
$y = 0$ gir: $\quad 0 = \frac{1}{\sqrt{9-a^2}}(9 - ax) \Leftrightarrow x = \frac{9}{a}$
): $\quad A = (\frac{9}{a}, 0)$

b)
$$F = \frac{gh}{2} = \frac{\frac{9}{a}\frac{9}{\sqrt{9-a^2}}}{2} = \frac{81}{2}\frac{1}{a\sqrt{9-a^2}}$$

c)
Håpløs språkbruk i oppgaven, hvordan bruke en "skisse" til å finne bunnpunkter?
Poenget er vel å bruke lommeregner eller annet digitalt verktøy...

Lag graf på lommeregner med:
Y1=81/(2X√(9-X ^2))
Blir seende omtrent slik ut:



CALC, minimum gir da bunnpunktet;

Minste areal 9.00, når $a \approx 2.12$

d)

Før derivasjon bør man enten skrive om til:

$F(a) = \frac{81}{2}a^{-1}(9-a^2)^{-\frac{1}{2}}$ og derivere med produktregel og kjerneregel

eller bedre:

$F(a) = \frac{81}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{9-a^2}} = \frac{81}{2}\frac{1}{\sqrt{9a^2-a^4}} = \frac{81}{2}(9a^2-a^4)^{-\frac{1}{2}}$

Kjerneregel gir da:

$F(a) = \frac{81}{2}u^{-\frac{1}{2}}, \qquad u = 9a^2 - a^4$

og

$F'(a) = \frac{81}{2}(-\frac{1}{2})u^{-\frac{1}{2}-1}(18a-4a^3) = -\frac{81}{4}(9a^2-a^4)^{-\frac{3}{2}}2(9a-2a^3) = -\frac{81}{2}\frac{1}{(\sqrt{9a^2-a^4})^3}(9a-2a^3)$

Minimum når $F'(a) = 0$:

$9a-2a^3 = 0 \Leftrightarrow 2a(\frac{9}{2}-a^2) = 0 \Leftrightarrow 2a(\sqrt{\frac{9}{2}}-a)(\sqrt{\frac{9}{2}}+a) = 0 \Leftrightarrow$

$a = 0$ (Forkastes)$\vee a = -\sqrt{\frac{9}{2}}$ (Forkastes)$\vee a = \sqrt{\frac{9}{2}} \approx 2.12$

$F(\sqrt{\frac{9}{2}}) = \frac{81}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}\sqrt{9-(\sqrt{\frac{9}{2}})^2}} = \frac{81}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}}\frac{1}{\sqrt{9-\frac{9}{2}}} = \frac{81}{2\sqrt{\frac{9}{2}}\sqrt{\frac{9}{2}}} = \frac{81}{2\frac{9}{2}} = \frac{81}{9} = 9$

): Minst areal 9 når $a = \sqrt{\frac{9}{2}}$.