R1 - Eksamen V10 - 27.05.2010

Løsningsskisser

Del 1

Oppgave 1

a) 1) Produktregel: $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$

2) Kjerneregel: $f(x) = 4e^u, \quad u = x^2 - 3x$
$f'(x) = 4e^u(2x-3) = 4(2x-3)e^{x^2-3x}$

b)
1) $P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 16 = 0$

$P(2) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x-2)Q(x)$

$$\begin{array}{lllll}
x^3 & -4x^2 & -4x & +16 & = (x-2)(\;x^2 \;\; -2x \;\; -8) \\
x^3 & -2x^2 & & & \\
 & -2x^2 & -4x & & \\
 & -2x^2 & +4x & & \\
 & & -8x & +16 & \\
 & & -8x & +16 & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Andregradsuttrykket $Q(x)$: $x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \lor x = -2$

$Q(x) = (x-4)(x+2)$

): $P(x) = (x-2)(x-4)(x+2)$

(Kunne gjort direkte med felles faktor:
$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = x^2(x-4) - 4(x-4) = (x^2-4)(x-4) = (x-2)(x+2)(x-4)$
men må vel bruke polynomdivisjon når de ber om det...)

2) $(x-2)(x-4)(x+2) \le 0$

```
                 -2       2        4
x - 2     -------------o—————————————————
x - 4     -------------------o———————————
x + 2     -------o———————————————————————
Uttrykk   -------o—————o------o——————————
```

$L = \langle \leftarrow, -2] \cup [2, 4]$

c)

Per er fra Bergen$\Rightarrow$Per er fra Norge

Hvis påstanden "Per er fra Bergen" er sann, må også påstanden "Per er fra Norge" være sann, altså en implikasjon.
(Løsningsmengden for det første utsagnet er dessuten inkludert i løsningsmengden til det andre utsagnet.)

d)
$\vec{a} = [3,5]$

1) $\vec{b} = -2\vec{a} = -2[3,5] = [-6,-10]$

2) $\vec{c} = [1,y]$ (Velger x –koordinat 1, da vi selv kan bestemme lengde.)

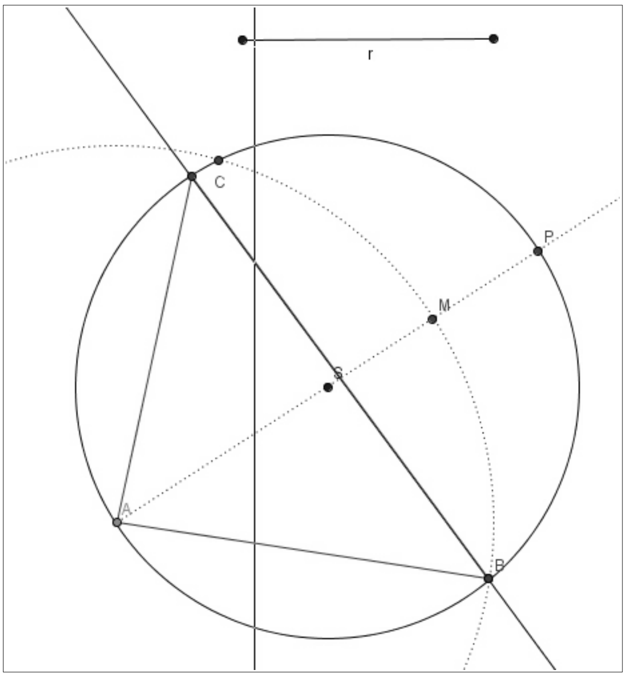
$$\vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \Leftrightarrow [3,5]\cdot[1,a] = 0 \Leftrightarrow 3+5a = 0 \Leftrightarrow a = -\tfrac{3}{5}$$

Kan bruke $[1,-\frac{3}{5}]$, men velger en som er 5 ganger større for å unngå brøk: $\vec{c} = [5,-3]$

(Kan bruke regel direkte: "Bytt om koordinater og skift fortegn på en av dem.")

e)
$4(1+\frac{x}{100})^4 = 64 \Leftrightarrow (1+\frac{x}{100})^4 = 16 \Leftrightarrow (1+\frac{x}{100}) = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2 \Leftrightarrow$
$x = 100(\pm 2 - 1) \Leftrightarrow x = 100 \vee x = -300$

f)



Starter med sentrum S.
Sirkel med radius r om S.
Velger A på sirkel.

Konstruerer $\frac{3}{2}r$: (Flere måter å gjøre dette på...)
Stråle gjennom A og S, som skjærer sirkel i P.
Konstruerer midtpunktet M til S og P.

AM er da $\frac{3}{2}r$

Finner B ved å slå sirkel om A gjennom M. (Da blir $AB = AM = \frac{3}{2}r$.)

Thales: $\angle ABP$ er 90°
BC må da halvere vinkel $\angle ABP$, så vi konstruerer halveringslinjen
for vinkel $\angle ABP$.
Halveringslinjen skjærer da sirkelen i C.

(Alternativt konstruere en normal på AS gjennom S, da $\angle ASC$ er sentralvinkel
til periferivinkelen $\angle ABC$, og derfor må være $2\angle ABC = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.
C som skjæring av sirkel og denne normalen.)

Oppgave 2

$f'(x) = 2(x+1)(x-3)$

a)
Tall-linjer gir:

```
                 -1        3
f'(x) :   ————————o- - - - -o————————
```

$f(x)$ voksende i $\langle \leftarrow, -1]$ og $[3, \rightarrow\rangle$
$f(x)$ avtagende i $[-1, 3]$

Bunnpunkt: $(3, f(3))$
Toppunkt: $(-1, f(-1))$

b)
$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$
$f''(x) = 4x - 4$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vendepunkt: $(1, f(1))$

$g'(x) = a(x-b)(x-c) = ax^2 - abx - acx + abc = ax^2 - a(b+c)x + abc$

$g''(x) = 2ax - a(b+c)$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax - a(b+c) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a(b+c)}{2a} = \frac{b+c}{2}$

Vendepunkt for $x = \frac{b+c}{2}$. Bare en løsning, så bare ett vendepunkt.
Her er $b = x_{maks}$ og $c = x_{\min}$ eller omvendt, så $x = \frac{x_{maks}+x_{\min}}{2}$,
altså midt mellom x_{maks} og $x_{\min}$.

Del 2

Oppgave 3

a) Trekker 5 av 12 kamper, uordnet, uten tilbakelegging: $\binom{12}{5} = 792$

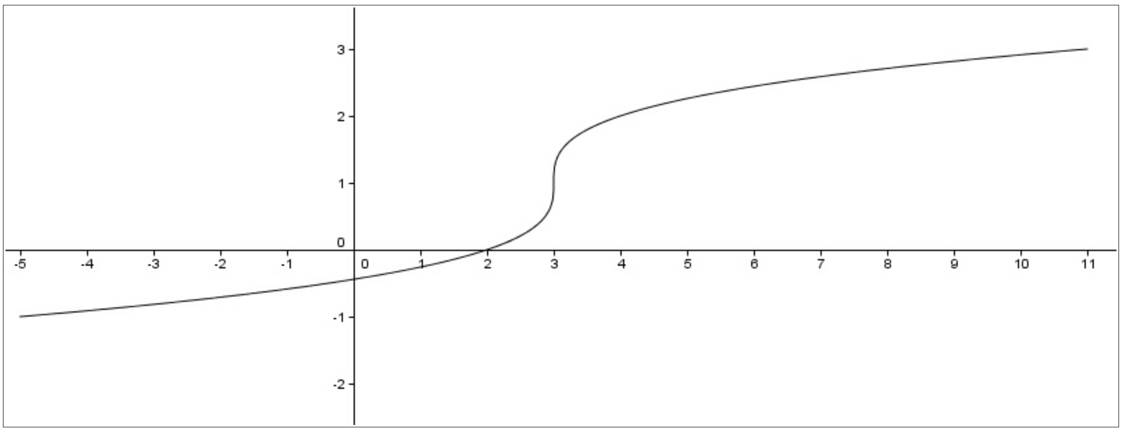
b) 2 muligheter på hver av de 7 siste, multiplikasjonsregelen: $2^7 = 128$
(Eller trekke fra {U,B} 7 ganger, ordnet, med tilbakelegging.)

c) Muligheter i alt: $3^{12} = 531\,441$ (mulige)
Muligheter med 5H: $792 \cdot 128 = 101\,376$ (gunstige)

Sannsynlighet: $P(5\text{H}) = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}} = \frac{101376}{531441} \approx 0.191$

Oppgave 4

Slike oppgaver bør si noe om hva slags benevninger som gjelder.
Praktisk anvendelse med partikkel, fart og akselerasjon er rimelig meningsløst uten benevning...
a)

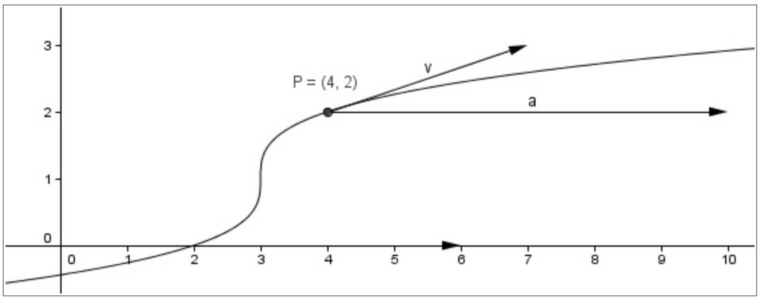


Lommeregner:
MODE, Par
X_{1T}=T ^3+1
Y_{1T}=T+1
WINDOW:
T_{min}=-2
T_{max}=2
Aksene må ha piler og enhetsinndeling. Grafen må også være såpass nøyaktig at den stemmer med hva man regner ut ellers i oppgaven.

b)
Hastighet: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = [3t^2, 1]$
Akselerasjon: $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = [6t, 0]$

$\vec{v}(1) = [3, 1]$
$\vec{a}(1) = [6, 0]$

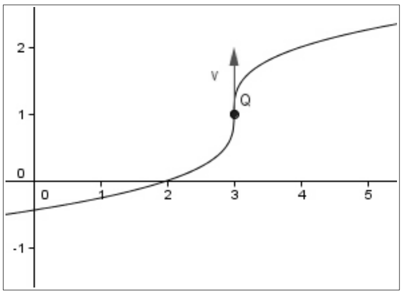
Punkt: $\vec{r}(1) = [4, 2] \Leftrightarrow P = (4, 2)$



Pass på å markere såpass nøyaktig at $\vec{v}(1)$ ser ut som den tangerer kurven.

c)
$\vec{v}(t) \parallel y$ –akse$\Leftrightarrow \vec{v} = [0,1] \Leftrightarrow 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Punkt: $\vec{r}(0) = [3,1] \Leftrightarrow Q = (3,1)$



Oppgave 5

Alternativ I

a)
$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$P = (1,1)$

T_1 :
Stigningstall: $st = f'(1) = 3$
Ett-punkts-formel: $y - y_P = st(x - x_P) \Leftrightarrow$
$y - 1 = 3(x-1) \Leftrightarrow y = 3x - 2 \qquad QED$

b)
Skjæring $T_1, f(x)$:
$3x - 2 = x^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

$P(1,1)$ gir en løsning: $x = 1$, så $(x-1)$ må være en faktor i $x^3 - 3x + 2$:

$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$ (Polynomdivisjon.)

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (P er dobbel løsning på grunn av tangering!) $\vee x = -2$ (Q)

(Egentlig gir $P(1,1)$ en dobbel løsning $x = 1$, så $(x-1)^2$ må være en faktor i $x^3 - 3x + 2 = 0$.
Vi kunne derfor gjort polynomdivisjonen
$x^3 - 3x + 2 = (x^2 - 2x + 1)(x + 2)$

og fått $x_Q = -2$ direkte.)

): $\quad Q = (-2, f(-2)) \;= (-2, -8)$

c)
Egentlig tungvindt å gjøre dette med regning, $f(x) = x^3$ er symmetrisk om Origo,
så T_2 og R må også være symmetrisk om Origo!
Da får vi direkte:
$R = (-1, -1)$

Men, når eksamensoppgaver befaler oss å gjøre dette med regning, så må
vi gjøre det, dum oppgave spør du meg... :-(

$R = (x_R, x_R^3)$

T_2 :
Stigningstall: $\quad st = f'(x_R) = 3x_R^2 = 3 \Leftrightarrow x_R^2 = 1 \Leftrightarrow x_R = \pm 1$
(Positiv løsning er P!)

): $\quad R = (-1, f(-1)) \;= (-1, -1)$

Alternativ II

a)
Del for kvadrat: $\quad l = 10 - x$
Side i kvadrat: $\quad s = \frac{l}{4} = \frac{10-x}{4}$

Areal kvadrat: $\quad F_1(x) = s^2 = (\frac{10-x}{4})^2 = \frac{1}{16}(10-x)^2 \qquad QED$

b)
Side i trekant: $\quad s_T = \frac{x}{3}$
Areal trekant: $\quad F_2(x) = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{\frac{x}{3}\frac{x}{3}\sin(60^\circ)}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} \qquad QED$

c)
$$F(x) = \frac{1}{16}(10-x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 = (\frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{1}{16})x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{4}$$

$$F'(x) = 2(\frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{1}{16})x - \frac{5}{4} = (\frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8})x - \frac{5}{4}$$

Minst areal når $F'(x) = 0 \Leftrightarrow (\frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8})x - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow$
$$x = \frac{5}{4(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{8})} = \frac{5}{(\frac{2\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{2})} = \frac{5 \cdot 18}{4\sqrt{3}+9} = \frac{90(4\sqrt{3}-9)}{(4\sqrt{3}+9)(4\sqrt{3}-9)} = \frac{90(4\sqrt{3}-9)}{16 \cdot 3 - 81} =$$
$$\frac{90(4\sqrt{3}-9)}{-33} = \frac{30(9-4\sqrt{3})}{11} \approx 5.65$$

): $\quad$ Ledningen må kuttes i to deler på ca. 5.65 m og 4.35 m.

Oppgave 6

a)
Trekant ASD : $AD = SD = r$
Likebenet trekant $\Rightarrow \angle SAD = \angle ASD = x$

b)
$\angle SDC = 180^\circ - \angle ADS = 180^\circ - (180^\circ - 2x) = 2x$
Trekant DSC er også likebenet med $SD = SC = r$,
så her er $\angle SDC = \angle SCD = 2x$

c)
Vinkelsum: $\angle ASD + \angle DSC + \angle CSB = 180^\circ$
Her er:
$\angle ASD = x$
$\angle DSC = 180^\circ - 2(2x)$ (Vinkelsum i DSC)
$\angle CSB = y$
Så vi får:
$x + (180^\circ - 4x) + y = 180^\circ \Leftrightarrow -3x + y = 0 \Leftrightarrow y = 3x$

Kommentar:

Dette resultatet er egentlig en egen setning; Setningen om Toppvinkler.
$\angle BAC$ kaller vi en utvendig topp-vinkel til sirkelen.
(Toppvinkler dannes av linjer som skjærer en sirkel.)

Setningen sier at toppvinkelen er halvparten av differansen mellom de mellomliggende buene vinkelbenene skjærer ut av sirkelen:
$u = \frac{m-n}{2}$, der $u = \angle BAC$, m er buen BC tilhørende sentralvinkelen $\angle BSC$
og n er buen tilhørende sentralvinkelen $\angle ASD$

Vi ser at dette gir resultatet direkte: $\angle BAC = \frac{\angle BSC - \angle ASD}{2} \Leftrightarrow$
$x = \frac{y-x}{2} \Leftrightarrow 2x = y - x \Leftrightarrow 3x = y$ QED

Hvis toppvinkelen ligger inne i sirkelen, får isteden summen: $u = \frac{m+n}{2}$.

Oppgave 7

a)
$n = 1:$ $\frac{4^1-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$
$n = 2:$ $\frac{4^2-1}{3} = \frac{15}{3} = 5$
$n = 3:$ $\frac{4^3-1}{3} = \frac{63}{3} = 21$
$n = 4:$ $\frac{4^4-1}{3} = \frac{255}{3} = 85$

b)
$4^n - 1 = (2^2)^n - 1 = 2^{2n} - 1 = 2^{n2} - 1 = (2^n)^2 - 1 =$ (Potensregler)
$(2^n - 1)(2^n + 1)$ (Konjugatsetningen)
QED

c)
Differansene mellom første og andre, og andre og tredje tall er ***en***, så de må være heltall som ligger etter hverandre på tallinjen.

Tredje hvert tall på tallinjen er delelig med 3.
(3,6,9,12, ...)

2^n har bare 2 som faktor og kan derfor ikke være delelig med 3.

d)
$(2^n - 1)$ eller $(2^n + 1)$ må være delelig med 3. (Se c))

Da må produktet $(2^n - 1)(2^n + 1)$ være delelig med 3,
da en av faktorene er delelig med 3.

Da $(2^n - 1)(2^n + 1) = 4^n - 1$ (Se b))
må $4^n - 1$ være delelig med 3, *QED*.