Skalarprodukt - Bakgrunn og bevis

Skalarproduktet er mer en *operasjon* vi gjør på to vektorer som gir et tall (skalar) som resultat, mer enn det er et "produkt".

(Ville kanskje vært mer naturlig å kalle skalarprodukt "*skalaroperasjonen*", eneste grunnen til at vi kaller det et produkt, er at vi bruker et *forstørret* produktsymbol, •, som operatortegn, da dette er greiere å skrive enn for eksempel $sp(\vec{u}, \vec{v})$.)

Hvorfor er skalarprodukt definert som = $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$?

Den viktigste grunnen er historisk, fysikere definerer arbeid som:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F\cos\alpha)s \qquad \text{, der } F\cos\alpha \text{ er } \textit{komponenten} \text{ langs veien } s.$$

Sener fant matematikere ut at vi kan bruke skalarprodukt til en utrolig mengde nyttige og morsomme utregninger!

For eksempel at vi kan regne ut vinkelen α mellom vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$, med formelen:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

forutsatt at vi vet at $\vec{u} \cdot \vec{v}$ også kan regnes ut med *koordinatformelen*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [x_u, y_u] \cdot [x_v, y_v] = x_u x_v + y_u y_v$$

(Boken "beviser" denne koordinatformelen på side 45, men forutsetter da at vanlige regne- og parentesregler gjelder for operasjonen skalarprodukt, og det blir aldri bevist, så lærebøkenes bevis henger egentlig i løse luften...)

Et fullverdig bevis er mer kronglete men illustrerer to viktige ting:
- Skalarproduktet har nær sammenheng med cosinus-setningen. (Se 1T.)
- Skalarproduktet og vektorer er egentlig en svært smart måte å skjule cosinus-setningen og erstatte beregninger med cosinus-setningen med *enklere og raskere* vektor-beregninger.

Vektorer er altså *ikke* vanskelig, de ble laget for å gjør visse geometriske operasjoner *enklere og lettere*!

Eksempeloppgaven og beviset som kommer antyder hvilke omstendelige operasjoner vi unngår ved å bruke vektorer istedenfor trigonometri!

Eksempel på oppgave

Regn ut vinkelen α mellom AB og AC i trekanten ABC, der hjørnene
$A(1,1)$, $B(4,2)$ og $C = (3,7)$
er gitt.

Med cosinus-setningen:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\,AC\cos\alpha$
som gir:
$\cos\alpha = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\,AB\,AC} = \frac{((4-1)^2+(2-1)^2)+((3-1)^2+(7-1)^2)-((3-4)^2+(7-2)^2}{2\sqrt{(4-1)^2+(2-1)^2}\sqrt{(3-1)^2+(7-1)^2}} =$
... (en del regning)
$= \frac{3}{5}$
$\alpha \approx 53.1°$

Med vektor-regning:

$\overrightarrow{AB} = [3,1], \quad \overrightarrow{AC} = [2,6], \quad \overrightarrow{BC} = [-1,5]$
som gir:
$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{3\cdot2+1\cdot6}{\sqrt{10}\sqrt{40}} = \frac{12}{\sqrt{400}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
$\alpha \approx 53.1°$

Som man ser er selve tallregningen adskillig enklere , både å huske og å utføre, med vektorregning!

Bevis for koordinatformelen til skalarproduktet

Vi bruker en trekant $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ og $C(x_C, y_C)$.
Hvis vi skulle regne ut vinkelen $\alpha = \triangle BAC$ ved hjelp av cosinus-setningen, ville vi fått: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\,AC\cos\alpha$
eller:

$$\cos\alpha = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\,AB\,AC} = \frac{\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}}{AB\,AC}$$

Definisjonen av skalarprodukt gir

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

Sammenligning viser at vi må bevise at uttrykket $\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$ gir koordinatformelen, altså at
$\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2} = (x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A)$

Vi setter igang:

$$\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2} = \frac{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2-((x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2)}{2} =$$
$$\frac{x_B^2-2x_Bx_A+x_A^2+y_B^2-2y_By_A+y_A^2+x_C^2-2x_Cx_A+x_A^2+y_C^2-2y_Cy_A+y_A^2-(x_C^2-2x_Cx_B+x_B^2+y_C^2-2y_Cy_B+y_B^2)}{2} =$$
$$\frac{2x_A^2+2y_A^2+2x_Bx_C-2x_Ax_C-2x_Ax_B+2y_By_C-2y_Ay_B-2y_Ay_C}{2} =$$
$$x_A^2 + y_A^2 + x_Bx_C - x_Ax_C - x_Ax_B + y_By_C - y_Ay_B - y_Ay_C =$$
$$x_A^2 + x_Bx_C - x_Ax_C - x_Ax_B + y_A^2 + y_By_C - y_Ay_B - y_Ay_C =$$
$$(x_B - x_A)x_C - (x_B - x_A)x_A + (y_B - y_A)y_C - (y_B - y_A)y_A =$$
$$(x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A) \qquad QED$$

Ved å forskyve hele figuren til A er i origo, blir beviset litt enklere, da $x_A = y_A = 0$, slik at vi får:

$$\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2} = \frac{x_B{}^2+y_B{}^2+x_C{}^2+y_C{}^2-((x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2)}{2} =$$
$$\frac{x_B^2+y_B^2+x_C^2+y_C^2-(x_C^2-2x_Cx_B+x_B^2+y_C^2-2y_Cy_B+y_B^2)}{2} =$$
$$\frac{x_B^2+y_B^2+x_C^2+y_C^2-x_C^2+2x_Cx_B-x_B^2-y_C^2+2y_Cy_B-y_B^2}{2} =$$
$$\frac{2x_Cx_B+2y_Cy_B}{2}$$

$x_Bx_C + y_By_C$ som vi ser er koordinatformelen, når $x_A = y_A = 0$.

Heldigvis slipper vi å gjøre dette mer enn den ene gangen vi beviser koordinatformelen. Deretter kan vi bare bruke den *enkle* koordinatformelen på denne typer oppgaver, men det bør være motiverende å se hvilken *kompleksitet* den geniale og elegante koordinatformelen skjuler og sparer oss for!