Fagdag 26.03.2015 - CAS

Differensialligninger og vektorer

Oppgave 1

Løs differensialligningene med CAS:

a) $y' = x\sqrt{y}$

b) $y' + 3y = x$

c) $y'' - 8y' + 7y = 0$

Oppgave 2 - Løs med CAS

En bil med masse m kjører med konstant fart v_1 idet clutchen trykkes inn og bilen triller videre uten motorkraft.
Vi regner at bare friksjonskrefter og luftmotstand, proporsjonale med farten i andre potens, $R = kv^2$, virker på bilen når den triller videre.
Vi får differensialligningen $mv' + kv^2 = 0$, der $v(t)$ er bilens fart i m/s og t er tiden i sekunder.

a) Finn den generelle og den spesielle $(v(0) = v_1)$ løsningen av differensialligningen.

b) Bruk resultatet i a) til å utlede den såkalte "coasting"-formelen:
$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = \frac{k}{m}\Delta t$, der Δt er tiden bilen bruker på å trille fra startfart v_1 til sluttfart v_2.

c) Dette kan brukes til å finne faktoren k ved å ta tiden Δt bilen bruker på å sakne farten fra v_1 til v_2 med frikoblet motor.
Finn k hvis $v_1 = 60$ [km/t], $v_2 = 40$ [km/t] og $\Delta t = 20$ [s]

d) Hvor langt har bilen beveget seg på de 20 sekundene i e)?

Oppgave 3 - Løs med CAS

Når en bil kjører over en hump i veien, er det ønskelig at støtdemperne sørger for at den vertikale svingebevegelsen som oppstår blir dempet mest mulig. Hvis massen til bilen er m, den samlede fjærkonstanten til støtdemperne k og dempningskonstanten i støtdemperne er q, vil den vertikale posisjonen $y = f(t)$ til bilen være gitt ved en løsning av differensialligningen

$$my'' + qy' + ky = 0$$

a) En bil med massen $m = 1000$ kg kjører på en horisontal vei.
Den samlede fjærkonstanten for de fire støtdemperne setter vi til $k = 1.0 \cdot 10^5$ N/m, og dempningskonstanten til $q = 2.0 \cdot 10^4$ Ns/m.

Bilen kjører over en hump.
Finn det generelle uttrykket for posisjonen y til bilen t sekunder etter passering av toppen på humpen, når initialbetingelsene er
$y(0) = 0.3$ [m] og $y'(0) = 0$ [m/s]

b) Hva slags type svingning er dette? Bør støtdemperne skiftes?

En gammel bil med samme masse og samme samlede fjærkonstant har dempningskonstant $q = 1.0 \cdot 10^4$.

c) Hva slags type svingning får denne bilen etter passering av en tilsvarende hump? Bør støtdemperne skiftes?

(Gode støtdempere bør ikke passere likevektspunktet mer enn en gang etter en hump og stabilisere seg på likevektspunktet etter ca. ett sekund.)

Oppgave 4

Gitt differensialligningen $y'' + 3y' = x$

a) Løs ligningen med CAS.

b) Ligningen er inhomogen, men kan løses ved å innføre $u = y'$.
Løs ligningen for hånd. (Ved å først løse $u' + 3u = x$, og deretter ved å finne $y = \int u\,dx$.)

Oppgave 5 - Løs med CAS

En dyrebestand omfatter i dag ($t = 0$) 6000 dyr.
Utviklingen av dyrebestanden er gitt ved differensialligningen

$y' = k(B - y)(y - A)$ [antall dyr], der t er tid i år.

Dette er en variant av den vanlige differensialligningen for logistisk vekst.
Her er bæreevnen $B = 11000$, mens $A = 2000$ er en tilsvarende nedre grense for hvor lav bestanden kan bli før den risikerer å dø ut.
Gitt $k = 0.000010$ $[\frac{1}{\text{dyr}\cdot\text{år}}]$

a) Hva er vekstfarten i dyrebestanden i dag?

b) Hva er vekstfarten i dyrebestanden når den har nådd 8000 år.

c) Vis at løsningen blir $y = \frac{A+BCe^{k(B-A)t}}{1+Ce^{k(B.A)t}} \vee y = B$ ($y = A$ er inkludert i $C = 0$.)

d) Hvor lang tid ville det ha tatt før bestanden døde ut hvis den var på 1900 dyr i utgangspunktet?

Oppgave 6 - Løs med CAS (Eksamen høsten 2011)

En sylinderisk tank inneholder vann. Vi vil undersøke hvor høyt (y) vannet står i tanken t [minutter] etter at vannet har begynt å renne ut

gjennom et hull i bunnen av tanken.
Toricellis lov sier følgende:
Vannstanden avtar med en hastighet som er proporsjonal med kvadratroten av vannstanden.

Dette gir differensialligningen: $y' = -k\sqrt{y}$, der $k > 0$.

a) Vis at den generelle løsningen blir $y = \frac{1}{4}(C - kt)^2$.

b) Du får vite at $y(0) = h$ og $y(10) = \frac{h}{4}$.
Vis at en løsning for konstantene er $C = 2\sqrt{h}$ og $k = \frac{\sqrt{h}}{10}$.

c) Bestem hvor lang tid det tar før tanken er tom.

Oppgave 7 - Løs med CAS

Vi har funksjonen $f(x) = A\sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Tangenten T til grafen i punktet $P = (a, f(a))$ skjærer x-aksen i punktet Q.
Gitt er også punktet $R = (a, 0)$.

a) Vis at tangenten har ligningen $T : y = (A\cos a)x - A(a\cos a - \sin a)$

b) Bestem koordinatene til Q.

c) Vis at arealet avgrenset av grafen til $f(x)$ og x-aksen fra Origo til R blir $A(1 - \cos a)$.

d) Grafen til $f(x)$ deler trekanten ΔQRP i to områder. Bestem den verdien av a som gjør disse to områdene like store.

Oppgave 7 - Løses med CAS

Gitt punktene $A = (1, 1, 1)$, $B = (5, -1, 0)$ og $C = (9, 6, 5)$.

a) Finn vektorene $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BC}$ på koordinatform.

b) Finn avstanden mellom punktene B og C.

c) Finn vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

d) Undersøk om $\overrightarrow{AB}$ står normalt på $\overrightarrow{BC}$.

e) Lag en normalvektor til $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

f) Det finnes et punkt D slik at $ABCD$ blir et parallellogram.

Hva er koordinatene til D?

g) Finn koordinatene til punktet M midt på linjestykket BC.

h) Finn eventuelle verdier av k som gjør at vektoren $\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$ er parallell med y-aksen.

i) Finn eventuelle verdier av l som gjør at vektoren $\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{BC}$ står normalt på $\overrightarrow{AC}$.

j) Finn vektoren $\overrightarrow{AE}$, som skal være projeksjonen av $\overrightarrow{AD}$ på $\overrightarrow{AB}$.

k) Hva er avstanden fra punktet D til linjen gjennom A og B?

l) Hva er arealet av parallellogrammet $ABCD$?

Oppgave 8 - Løses med CAS

En trekant har hjørner på de tre koordinataksene:
$A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ og $C = (0, 0, c)$.

a) Finn arealet av trekanten ΔABC uttrykt ved a, b og c.

b) Origo er toppunktet for en trekantet pyramide (tetraeder) med ΔABC som grunnflate. Finn volumet av denne pyramiden.

c) Hva er avstanden mellom planet gjennom ABC og Origo?

d) Finn en parameterfremstilling for planet gjennom A, B og C.

e) Finn en parameterfremstilling for en linje som står normalt på planet gjennom A, B og C og går gjennom Origo.