Oppgave 2.4 side 114 - Eiffeltallene

Generell metode for å lage formler for polynom-rekker.

For spesielt interesserte!

Definisjoner og regler:

Differanser: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Fakturell: $n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$
slik at: $n^{(2)} = n(n-1),\ n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$ osv...

Da kan vi vise en regel som minner om derivasjon:

$\Delta n^{(2)} = 2n$
$\Delta n^{(3)} = 3n^{(2)}$
...
$\Delta n^{(r)} = rn^{(r-1)}$

Sum: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Regel (som tilsvarer integral (kapittel 5), som igjen er det omvendte av derivasjon)
$S_n = A_{n+1} - A_1$, der $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n = a_n$

Antydning av bevis:

$$\begin{aligned}
\Delta n^{(r)} &= \Delta n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \\
&(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+2) - n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \\
&n(n-1)\ldots(n-r+2)[(n+1)-(n-r+1] = \\
&n^{(r-1)}[n+1-n+r-1] = n^{(r-1)}r = rn^{(r-1)}
\end{aligned}$$

Hvis $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n = a_n$, har vi:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots + (A_{n+1} - A_n) = A_{n+1} - A_1$$

Utregning:

Vi har Eiffeltallene, som vi skriver om til fakturell-notasjon:

$$E_n = \frac{n(n+3)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}n = \frac{1}{2}n(n-1) + 2n = \frac{1}{2}n^{(2)} + 2n$$

Så må vi finne en A_n som er slik at $\Delta A_n = E_n = \frac{1}{2}n^{(2)} + 2n$

Bruk av regelen $\Delta n^{(r)} = rn^{(r-1)}$ baklengs gir:

$A_n = \frac{1}{2}\frac{1}{3}n^{(3)} + n^{(2)} = \frac{1}{6}n^{(3)} + n^{(2)} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + n(n-1)$

Da gir formelen $S_n = A_{n+1} - A_1$ oss:

$S_n = \frac{1}{6}(n+1)n(n-1) + (n+1)n - 0 = n(n+1)(\frac{1}{6}(n-1) + 1) =$
$n(n+1)\left(\frac{1}{6}n + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+5) = \frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{5}{6}n$

$S_{100} = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 105 = 176\,750$

eller

$S_{100} = \frac{1}{6}100^3 + 100^2 + \frac{5}{6}100 = 176\,750$

Kontroll i GeoGebra CAS:

a(n):=n (n+2)/2

S(n):=Sum(a(i),i,1,n) gir: $\frac{1}{6}\mathrm{n}^3+\mathrm{n}^2+\frac{5}{6}\mathrm{n}$

Et annet eksempel - Pyramidetallene i 229:

Kvadrattallene:

$a_n = n^2 = n^2 - n + n = n(n-1) + n = n^{(2)} + n$

Pyramidetallene, som er sum av kvadrattallene:

$p_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$

Finner en I_n slik at $\Delta I = n^{(2)} + n$:

$I_n = \frac{1}{3}n^{(3)} + \frac{1}{2}n^{(2)} = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}n(n-1)$

$p_n = I_{n+1} - I_1 = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)n - 0 =$
$(n+1)n[\frac{1}{3}(n-1) + \frac{1}{2}] = (n+1)n[\frac{1}{3}n + \frac{1}{6}] =$
$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

$p_{50} = \frac{1}{6} \cdot 50 \cdot 51 \cdot (2 \cdot 50 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 50 \cdot 51 \cdot 101 = 42\,925$

$p_{100} = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 = 338\,350$

Kontroll i GeoGebra CAS:

a(n):=n ^2

S(n):=Sum(a(i),i,1,n) gir: $\frac{1}{3}\mathrm{n}^3+\frac{1}{2}\mathrm{n}^2+\frac{1}{6}\mathrm{n}$
