

Differanseregning

Spesielle regnemetoder for spesielt interesserte.

Spesielle metoder for å lage formler for polynom-følger og rekker/summer.

Definisjoner og regler:

Differanser: $\nabla a_n = a_{n+1} - a_n$

Faktorell: $n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$

$$\begin{aligned} \text{Slik at:} \quad n^{(2)} &= n(n-1) \\ n^{(3)} &= n(n-1)(n-2) \\ n^{(4)} &= n(n-1)(n-2)(n-3) \end{aligned}$$

Da kan vi bevise en regel som minner om derivasjon:

$$\begin{aligned} \nabla n^{(2)} &= 2n \\ \nabla n^{(3)} &= 3n^{(2)} \\ \dots \\ \nabla n^{(r)} &= rn^{(r-1)} \end{aligned} \quad \mathbf{I)}$$

Og ved å bruke dette den andre veien, kan vi bevise en regel som minner om integrasjon:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{n+1} [A_n] = A_{n+1} - A_1, \text{ hvis } \nabla A_n = a_n \quad \mathbf{II)}$$

Bevis for differanser:

$$\nabla n^{(2)} = (n+1)^{(2)} - n^{(2)} = (n+1)n - n(n-1) = n(n+1 - (n-1)) = 2n$$

Mer generelt:

$$\begin{aligned} \nabla n^{(r)} &= (n+1)^{(r)} - n^{(r)} = \\ &= (n+1)n(n-1)\dots(n-r+2) - n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)(n-r+1) = \\ &= n(n-1)\dots(n-r+2)[(n+1) - (n-r+1)] = \\ &= n^{(r-1)}[n+1 - n + r - 1] = n^{(r-1)}r = rn^{(r-1)} \end{aligned}$$

For geometriske/eksponentielle følger:

$$\nabla(a k^n) = a k^{n+1} - a k^n = a k^n(k-1)$$

): Differansene blir leddet over multiplisert med $(k-1)$!

Bevis for formelen for summering av rekke:

Hvis $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n = a_n$, har vi:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \dots + (A_{n+1} - A_n) = A_{n+1} - A_1$$

Eksempel på differanse-opstilling:

n :	1	2	3	4	5	...	n
$A_n :$	-1	4	21	56	115	...	$n^3 - 2n$
$a_n :$	5	17	35	59			$3n^2 + 3n - 1$
$\nabla a_n :$	12	18	24				$6n + 6$
$\nabla^{(2)} a_n :$	6	6					6

Vi ser at følgene i hver rad under den første indeksraden har raden under som differanser:

$$a_n = \nabla A_n = A_{n+1} - A_n$$

$$\nabla a_n = a_{n+1} - a_n$$

osv.

Følgene i hver rad har som vi ser økende grad for hver rad vi går oppover!

Legg også merke til summeringsmønsteret:

n :	1	2	3	4	5	...	n
$A_n :$	-1	4	21	56	115	...	$n^3 - 2n$
$a_n :$	5	17	35	59			$3n^2 + 3n - 1$
$\nabla a_n :$	12	18	24				$6n + 6$
$\nabla^{(2)} a_n :$	6	6					6

Her har vi:

$$-1 + (5+17+35+59)=115 \Leftrightarrow (5+17+35+59)=115-(-1)=116$$

Eller algebraisk:

$$A_1 + \sum_{i=1}^4 a_i = A_{4+1} = A_5 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 a_i = A_{4+1} - A_1 = A_5 - A_1$$

Utrekninger av eksplisitte formler for a_n , A_n og til slutt $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

Bortsett fra at graden avtar med 1 for hver linje, er det vanskelig å se noen sammenheng mellom funksjonsuttrykkene:

$A_n :$	$n^3 - 2n$
$a_n :$	$3n^2 + 3n - 1$
$\nabla a_n :$	$6n + 6$
$\nabla^{(2)} a_n :$	6

Men skriver vi dem som nPr med faktorell-notasjon;

$$n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1),$$

ser vi mønsteret vi beviste med differanser lengre opp:

$A_n :$	$n^3 - 2n$	$n^{(3)} + 3n^{(2)} - n$
$a_n :$	$3n^2 + 3n - 1$	$3n^{(2)} + 6n - 1$
$\nabla a_n :$	$6n + 6$	$6n + 6$
$\nabla^{(2)} a_n :$	6	6

Da har vi en metode for å finne eksplisitte uttrykk for a_n , A_n og $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$:

Bruk tabell og regn differanser til vi ender med konstanter i rad 4.

Raden over er da en aritmetisk rekke og vi finner lett $\nabla a_n = 6n + 6$

Så bruker vi differanseregulene omvendt, som en slags "integrasjon":

$$a_n = 6 \frac{n^{(2)}}{2} + 6n + C = 3n^{(2)} + 6n + C = 3n(n-1) + 6n + C$$

C bestemmes med betingelsen:

$$a_1 = 5 \Leftrightarrow 5 = 3 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + C \Leftrightarrow C = -1$$

$$): a_n = 3n^{(2)} + 6n - 1 = 3n(n-1) + 6n - 1 = 3n^2 + 3n - 1$$

Raden over, med A_n , kan lages på samme måte:

$$A_n = 3 \frac{n^{(3)}}{3} + 6 \frac{n^{(2)}}{2} - n + C = n^{(3)} + 3n^{(2)} - n + C$$

C bestemmes med betingelsen:

$$A_1 = -1 \Leftrightarrow -1 = 0 + 0 - 1 + C \Leftrightarrow C = 0$$

$$): A_n = n^{(3)} + 3n^{(2)} - n = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) - n = \\ n((n-1)(n-2) + 3(n-1) - 1) = n(n^2 - n - 2n + 2 + 3n - 3 - 1) = \\ n(n^2 - 2) = n^3 - 2n^2$$

Og da blir til slutt summen:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = A_{n+1} - A_1 = (n+1)^{(3)} + 3(n+1)^{(2)} - (n+1) - (-1) = \\ (n+1)n(n-1) + 3(n+1)n - (n+1) + 1 = \\ n(n^2 - 1) + 3n^2 + 3n - n - 1 + 1 = n^3 - n + 3n^2 + 2n = \\ n^3 + 3n^2 + n$$

Dette gir rekken med delsummer:

$$S_1 = 5$$

$$S_2 = 22 = (5 + 17)$$

$$S_3 = 57 = (5 + 17 + 35)$$

$$S_4 = 116 = (5 + 17 + 35 + 59)$$

osv.
