Flere eksempler på rekker og induksjonsbevis

Oppgave 2.42 e

Skal bevise at: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Ikke så lett å bevise direkte, så vi bruker først

Induksjonsbevis:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_n = \frac{n}{2^n}, \qquad S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Trinn I: $n = 1$:

$a_1 = \frac{1}{2}$

$S_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad OK$

Trinn 2: $n \to n+1$:

Antar at $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ gjelder for n.

Må vise at formelen også gjelder for $n+1$: $S_{n+1} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2 \cdot 2^n}$

Rekursivt har vi:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \left(\frac{n+2}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{(n+2)2-(n+1)}{2 \cdot 2^n} =$$
$$2 - \frac{2n+4-n-1}{2 \cdot 2^n} = 2 - \frac{n+3}{2 \cdot 2^n} \qquad OK$$

Et mer direkte bevis

som illustrerer et triks som kan brukes i andre sammenhenger:

I $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$ er det n i telleren som gjør at dette avviker fra en geometrisk rekke, så vi prøver å skrive om for å prøve å lage geometriske rekker:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{2} & + & \frac{2}{2^2} & + & \frac{3}{2^3} & + & \ldots & + & \frac{n}{2^n} & = \\
\\
\frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{2^3} & + & \ldots & + & \frac{1}{2^n} & + \\
 & & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{2^3} & + & \ldots & + & \frac{1}{2^n} & + \\
 & & & + & \frac{1}{2^3} & + & \ldots & + & \frac{1}{2^n} & + \\
 & & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \\
 & & & & & & & \ldots & \ldots & + \\
 & & & & & & & & \frac{1}{2^n} &
\end{array}$$

Her er radene i "trekanten" summer av geometriske rekker:

Rad 1: $\frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2})^n-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{(\frac{1}{2})^n-1}{1-2} = \frac{(\frac{1}{2})^n-1}{-1} = 1-(\frac{1}{2})^n$

Rad 2: $\frac{1}{2^2}\frac{(\frac{1}{2})^{n-1}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2})^{n-1}-1}{1-2} = \frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^{n-1}) = \frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^n$

Rad 3: $\frac{1}{2^3}\frac{(\frac{1}{2})^{n-2}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2^2}\frac{(\frac{1}{2})^{n-2}-1}{1-2} = \frac{1}{2^2}(1-(\frac{1}{2})^{n-2}) = \frac{1}{2^2}-(\frac{1}{2})^n$

...

Rad n: $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}-(\frac{1}{2})^n$

Summerer vi radene får vi:

$$S_n = 1-(\tfrac{1}{2})^n+\tfrac{1}{2}-(\tfrac{1}{2})^n+\tfrac{1}{2^2}-(\tfrac{1}{2})^n+\ldots+\tfrac{1}{2^{n-1}}-(\tfrac{1}{2})^n =$$
$$(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\ldots+\tfrac{1}{2^{n-1}})-(\tfrac{1}{2})^n-(\tfrac{1}{2})^n-(\tfrac{1}{2})^n\ldots-(\tfrac{1}{2})^n =$$
$$(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\ldots+\tfrac{1}{2^{n-1}})-((\tfrac{1}{2})^n+(\tfrac{1}{2})^n+(\tfrac{1}{2})^n\ldots+(\tfrac{1}{2})^n) =$$
$$1\frac{(\frac{1}{2})^n-1}{\frac{1}{2}-1}-n(\tfrac{1}{2})^n = 2-2(\tfrac{1}{2})^n-n(\tfrac{1}{2})^n =$$
$$2-(2(\tfrac{1}{2})^n+n(\tfrac{1}{2})^n) =$$
$$2-(\tfrac{1}{2})^n(2+n) = 2-\tfrac{n+2}{2^n} \qquad QED$$

Eksempel 2

(Se også ***oppgave 274*** i løsningsskisser fra kapitlet i et annet notat.)

Vanlig tilfelle

En pasient får tabletter som inneholder 20 mg av et stoff som brytes ned 10% hvert døgn.
Vi ønsker å se hvor mye som er igjen i blodet rett etter inntak av n'te tablett hvis pasienten får en tablett hver dag.
Vi setter opp tabellen:

1	**2**	**3**	…	**n**
20	$20 \cdot 0.9$	$20 \cdot 0.9^2$	…	$20 \cdot 0.9^{n-1}$
	20	$20 \cdot 0.9$	…	$20 \cdot 0.9^{n-2}$
		20	…	$20 \cdot 0.9^{n-3}$
			…	…
				20

Kolonne n viser hvor mye som er igjen i blodet rett etter inntak av n'te tablett.
(Akkurat som sparing med faste beløp hver termin.
Dekker også tilfelle med faste giftutslipp i en elv, hvor avrenning fjerner en viss prosent av giftmengden hver dag.)

Tallene i kolonne n er en geometrisk følge med $a_1 = 20, k = 0.9, n = n$,
så vi får: $S_n = a_1\frac{k^n-1}{k-1} = 20\frac{0.9^n-1}{0.9-1} = 200(1-0.9^n)$

"I det lange løp" ("Over tid" i oppgaver) vil mengden av stoffet stabilisere seg på:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-k} = \frac{20}{1-0.9} = 200 \text{ [mg]}$$

Variant

I en time diskuterte vi hva som ville skje hvis dosen ble halvert hvert døgn:
Da får vi tabellen:

1	**2**	**3**	$\ldots$	**n**
20	$20\cdot 0.9$	$20\cdot 0.9^2$	$\ldots$	$20\cdot 0.9^{n-1}$
	$\frac{20}{2}$	$\frac{20}{2}\cdot 0.9$	$\ldots$	$\frac{20}{2}\cdot 0.9^{n-2}$
		$\frac{20}{2^2}$	$\ldots$	$\frac{20}{2^2}\cdot 0.9^{n-3}$
			$\ldots$	$\ldots$
				$\frac{20}{2^{n-1}}\cdot 0.9^0$

Nivået rett etter inntak av n'te tablett blir da summen av kolonne n:

$$20\cdot 0.9^{n-1}+\frac{20}{2}\cdot 0.9^{n-2}+\frac{20}{2^2}\cdot 0.9^{n-3}+\ldots+\frac{20}{2^{n-1}}\cdot 0.9^0$$

Som kan omskrives til:

$$20\cdot 0.9^{n-1}+20\cdot 0.9^{n-1}\frac{1}{2\cdot 0.9}+20\cdot 0.9^{n-1}\frac{1}{2^2 0.9^2}+\ldots+20\cdot 0.9^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}0.9^{n-1}}$$

Altså igjen en geometrisk rekke!

Med $a_1=20\cdot 0.9^{n-1}, k=\frac{1}{2\cdot 0.9}=\frac{1}{1.8}, n=n$ får vi summen:

$$S_n=20\cdot 0.9^{n-1}\frac{(\frac{1}{2\cdot 0.9})^n-1}{\frac{1}{2\cdot 0.9}-1}=45\cdot 0.9^n(1-0.556^n)$$