Kommentarer til diskusjonen vi hadde om muntlig eksamen onsdag 04.06.2015

Fibonacci tall og spiraler førte til noen interessante diskusjoner som er verdt noen kommentarer:

Generalisering av Fibonacci-følgen:

Her eksemplifisert med eksemplet vi brukte: $a_1 = 5, a_2 = 12$:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 = 5 \\ a_2 = 12 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{array} \right\}$$

Som gir, hvis vi lager et regneark med formler:
I A3: =A2+1 (kopieres nedover til A4, A5, ...)
I B2 og B3: Starttallene 5 og 12
I B4: =B3+B2 (kopieres nedover til B5, B6, ...)
I C3: =B3/B2 (kopieres nedover til C4, C5, ...)

	A	B	C
1	n:	a(n):	Forhold:
2	1	5	
3	2	12	2.4
4	3	17	1.41667
5	4	29	1.70588
6	5	46	1.58621
7	6	75	1.63043
8	7	121	1.61333
9	8	196	1.61983
10	9	317	1.61735
11	10	513	1.6183
12	11	830	1.61793
13	12	1343	1.61807
14	13	2173	1.61802
15	14	3516	1.61804

Vi observerte at også i denne følgen går grenseverdien for forholdet mellom to ledd mot det gyldne snitt: $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.61803\ldots$

Jeg fikk ikke bevist dette på sparket ved å lage:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_{n-1}+a_n}$ og det skyldes at jeg gjorde for omstendelig, bedre å starte med den rekursive definisjonen alene:
$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$
og så dividere til:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$
I det lange løp vil denne ligningen gå mot det tallet vi skal bevise er det gyldne snitt:
$x = 1 + \frac{1}{x}$, da $\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{a_n}{a_{n-1}}$ når n blir svært stor og når vi forutsetter at følgen konvergerer.

Vi løser ligningen:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Eller: $x = \frac{-1}{\Phi} \vee x = \Phi$

$$\left(\text{da } \frac{-1}{\Phi} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{5}+1} = \frac{-2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{-2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Vi brukte bare den rekursive definisjonen, og ikke de to første leddene, så dermed er den rekursive delen av definisjonen nok til å vise at *alle* slike følger, uansett startverdier får det gyldne snitt som forholdet mellom to påfølgende ledd når *n* blir stor.

Hva er så det eksplisitte uttrykket for denne følgen?

Vi må godta følgende teori, akkurat som *differensialligninge*r har karakteristiske ligninger, har rekursive definisjoner av følger, eller *differens-ligninger* som vi kaller det, også en karakteristisk ligning:

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ kan også skrives som $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Differensligninger skrives på formen:

$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ (som tilsvarer $y'' - y' - y = 0$)

Karakteristisk ligning blir da: $r^{n+2} - r^{n+1} - r^n = 0 \Leftrightarrow r^2 - r - 1 = 0$,
som er ligningen vi brukte lenger opp og som derfor gir det gyldne snitt:

$$r_1 = -\frac{1}{\Phi} \vee r_2 = \Phi$$

Teorien sier da at generell løsning av differens-lingningen blir:

$a_n = C\,r_1^n + Dr_2^n$ (som tilsvarer $y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$)

eller

$$a_n = C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

C og *D* kan tilpasses ved å bruke $a_1$og a_2 som initialbetingelser:

Blir mye regning, så jeg bruker CAS (!) :

1	ϕ:=(1+sqrt(5))/2
	→ $\phi := \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$
2	a(n):=C ϕ^n+D (-1/ϕ)^n
	→ $\mathbf{a(n)} := \mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\right)^{n} + \mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}+1\right)\right)^{n}$
3	a(1)=5
	→ $\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\left(\sqrt{5}+1\right)+\frac{1}{2}\,\mathrm{D}\left(-\sqrt{5}+1\right)=5$
4	a(2)=12
	→ $\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\left(\sqrt{5}+3\right)+\frac{1}{2}\,\mathrm{D}\left(-\sqrt{5}+3\right)=12$
5	{$3, $4}
	Løs: $\left\{\left\{\mathrm{C}=\frac{3\sqrt{5}+35}{10}, \mathrm{D}=\frac{-3\sqrt{5}+35}{10}\right\}\right\}$
6	C:=(35+3 sqrt(5))/10
	→ $\mathrm{C} := \frac{1}{10}\left(3\sqrt{5}+35\right)$
7	D:=(35-3 sqrt(5))/10
	→ $\mathrm{D} := \frac{1}{10}\left(-3\sqrt{5}+35\right)$
8	Følge[a(n), n, 1, 10]
	→ $\left\{\frac{\frac{1}{10}}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(3\sqrt{5}+35\right)+\frac{\frac{1}{10}}{2}\left(-\sqrt{\right.\right.$
9	Forenkle[$8]
	→ $\{5, 12, 17, 29, 46, 75, 121, 196, 317, 513\}$
10	Grenseverdi[a(n)/a(n-1), n, inf]
	→ $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$

Vi ser at de 10 første leddene stemmer med regnearket lenger opp!

Og at forholdet $\frac{a_n}{a_{n-1}} \to \Phi \quad (\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2})$

Litt artig at uttrykket

$$a_n = \frac{35+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{35-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

skal gi heltallige resultater uansett n !

Vanlig Fibonacci kan regnes ut med:

$$C\frac{1-\sqrt{5}}{2} + D\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$$
$$C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

Tilsvarende regning gir da: $C = -\frac{1}{\sqrt{5}}, D = \frac{1}{\sqrt{5}}$
og den eksplisitte formelen:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

(som du vil finne i en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number)