Formelsamling i følger og rekker:

Tre typer følger/rekker:

- **Aritmetiske**
  $a_n = a_1 + d(n-1)$
  $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$
  Rekursiv definisjon: $a_n = a_{n-1} + d$
  Sjekk: Er differansen mellom alle ledd konstant?
  $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots ?$
- **Geometriske**
  $a_n = a_1 k^{n-1}$
  $S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k-1} \quad \rightarrow \quad S = \frac{a_1}{1-k}$ når $n \to \infty$, hvis $-1 < k < 1 \Leftrightarrow k^2 < 1$
  Rekursiv definisjon: $a_n = a_{n-1} \cdot k$
  Sjekk: Er forholdet mellom to påfølgende ledd konstant?
  $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots ?$
- **"Andre"**, eksempelvis:
  - Harmonisk følge: $a_n = \frac{1}{n}$. Tilsvarende rekke divergerer, selvom følgen er konvergent! Eks: Er $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$ konvergent? Nei, fordi den bare er $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ mindre enn den harmoniske, og den øker over alle grenser. (Sammenligningskriteriet.)
  - Trekanttallene, som er summen av n første heltallene: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $= \binom{n+1}{2}$ i Pascals trekant.
  - Tetraedertallene, som er summen av n første trekanttall: $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ $= \binom{n+2}{3}$ i Pascals trekant.
  - Kvadrattallene, som er summen av n første oddetall: $a_n = n^2 = \sum_{i=1}^{n}(2n-1)$
  - Pyramidetallene, som er summen av de n første kvadrattallene:
    $a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$
    (Se lenger ned under lommeregner eller GeoGebra.)

Differanser

er ofte nyttige selv om følgen ikke er aritmetisk, så la oss generalisere litt:

Vi ser på a_n : $\quad 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$

Differanser av differanser: $\Delta^{(2)}(a_n)$	2	2	2	2	2	…		
Differanser: $\Delta(a_n) = d_i = a_{n+1} - a_n$	2	4	6	8	10	12	…	
Følge: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$:	0	2	6	12	20	30	42	…
Sum: $A_n = A_1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$:	0	0	2	8	20	40	70	112

(Obs: Summefølgene A_n litt forskjøvet i forhold til den vanlige rekken $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = A_{n+1} - A_1$ for å få konsekvenst system med differanser.)

- Differansene er en lineær funksjon (første grad)
- Differansene av differansene er en konstant funksjon (0te grad)
- Graden synker med en per differanse, altså må $a_n$være en andregradsfunksjon av n!
- Vi ser også at summefølgen A_n har a_n som differansefølge og derfor må være en tredjegradsfunksjon av n. Dermed er også $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ en tredjegradsfunksjon.
  (Kjenner vi en A_n kan vi finne den vanlige rekkesummen ut fra:

$A_{n+1} = A_1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = A_1 + S_n \Leftrightarrow S_n = A_{n+1} - A_1$.)

Vi må altså bestemme a, b og c i $a_n = an^2 + bn + c$
eller a, b, c, d i $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Nok med tre punkter på funksjonsgrafen: $(1,0), (2,2), (3,6)$ for å finne a_n med regresjon:
Ti-8x-kalkulatorer:

{1,2,3} STO▹L1 Liste med uavhengig variabel n
{0,2,6} STO▹L2 Liste med avhengig variabel a_n
STAT, CALC, 5:QuadReg L1,L2

eller i GeoGebra:

L={(1,0),(2,2),(3,6)}
a(x)=regpoly[L,2]

Vi får: $a_n = n^2 - n = n(n-1)$

Mer formelt har vi:

$$\Delta(A_n) = A_{n+1} - A_n = a_n$$

Da har vi at rekken:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots + (A_{n+1} - A_n) = A_{n+1} - A_1$$

da alle ledd unntatt A_1 og A_{n+1} forekommer to ganger med motsatt fortegn og derfor kanselleres!
Sagt på en annen måte:

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = A_{n+1} - A_1$, hvis A_n oppfyller kravet $\Delta(A_n) = A_{n+1} - A_n = a_n$

Summering av rekker (når vi har funksjonsuttrykk):

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, der $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$:

a(i):=n (n+1)/2
Sum(a(i),i,1,50) gir **22100** i GeoGebra
Sum(a(i),i,1,n) gir $\mathbf{\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n}$

Finne eksplisitt definisjon når vi har rekursiv definisjon:
Rekke har differanser som er kvadrattall, altså rekursiv definisjon

$\{a_n = a_{n-1} + n^2, \quad a_1 = 1\}$ eller $\{a_{n+1} = a_n + (n+1)^2, \quad a_1 = 1\}$

Differanser: $d_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2$

Formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ gir da i GeoGebra CAS:

d(n):=(n+1)^2
a(n):=1+Sum(d(i),i,1,n-1) gir $\mathbf{\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n}$

Praktiske oppgaver:

"Tabell-oppgaver":
Oppgaver med akkumulering av penger, medisin, dopingmidler, tilførsel av gift o.s.v.

Noe avtar med k i hver tidsenhet og en ny dose d tilføres i hver tidsenhet. Hvor mye akkumuleres over tid?

Rekursivt: $\{a_n = a_{n-1}k + d, a_1 = d\}$

Lag tabell:

1	2	3	4	$\dots$	n
d	dk	dk^2	dk^3	$\dots$	dk^{n-1}
	d	dk	dk^2	$\dots$	dk^{n-2}
		d	dk	$\dots$	$\dots$
			d	$\dots$	dk^2
					dk
					d

Akkumulert sum (siste kolonne): $a_n = d + dk + dk^2 + dk^{n-1}$,
geometrisk rekke med $a_1 = d$, k og n ledd slik at: $a_n = d\frac{k^n-1}{k-1}$.

En variant er når vi har en startverdi a istedenfor d, eksempelvis en dyrebestand der det skytes en fast kvote hvert år (d negativ) og vekstfaktoren i bestanden er k (ut fra fødte/døde): $\{a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1}k + d\}$

1	2	3	4	5	$\dots$	n
a	ak	ak^2	ak^3	ak^4	$\dots$	ak^{n-1}
	d	dk	dk^2	dk^3	$\dots$	dk^{n-2}
		d	dk	dk^2	$\dots$	dk^{n-3}
			d	dk	$\dots$	$\dots$
				d	$\dots$	dk^2
						dk
						d

Altså en geometrisk rekke ($d + dk + dk^2 + dk^{n-2}$) og et ledd ak^{n-1},
så vi får:

$$a_n = d\frac{k^{n-1}-1}{k-1} + ak^{n-1}$$

Variant av geometrisk rekke:

Vanlig geometrisk: $S_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1}$

En variant: $S_n = a + 2ak + 3ak^2 + \ldots + nak^{n-1}$

Også her er tabell lurt:

$$\begin{aligned} S_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} &+ \\ ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} &+ \\ ak^2 + \ldots + ak^{n-1} &+ \\ \ldots & \\ +ak^{n-1} & \end{aligned}$$

Radvis:

$$\begin{aligned} &= a\frac{k^n-1}{k-1} + ak\frac{k^{n-1}-1}{k-1} + ak^2\frac{k^{n-2}-1}{k-1} + ak^{n-1} \\ &= a\frac{k^n-1}{k-1} + a\frac{k^n-k}{k-1} + a\frac{k^n-k^2}{k-1} + a\frac{k^n-k^{n-1}}{k-1} \\ &= \frac{a}{k-1}(nk^n - (1 + k + k^2 + k^{n-1}) \\ &= \frac{a}{k-1}(nk^n - \frac{k^n-1}{k-1}) = \frac{a}{(k-1)^2}(nk^{n+1} - (n+1)k^n + 1) \end{aligned}$$

Økonomiske beregninger:

Stort sett ligninger med geometriske rekker: Tegn figurer/tabell som vist over og finn a_1, k og antall ledd, n!

Induksjonsbevis:

Eksempel: Vise at summen av n tall i følgen $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ er $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$n = 1$: $a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, $S_1 = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ OK!

n til $n + 1$: Må vise at $S_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2}$ hvis vi antar at $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \left(\frac{(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}\right) =$$
$$1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} \qquad OK!$$