Induksjonsbevis

Innledning:

Brukes ofte når vi har gjettet på en sammenheng, for eksempel en formel for n –te ledd i en følge,
ut fra de 3-4 første leddene.
Induksjonsbeviset kan da overbevise oss om at vi har gjettet riktig og at formelen gjelder uansett hvor stor n måtte være.

Induksjonsbevis kunne også ha vært kalt "Rekursivt bevis", da tankegangen er følgende:

Hvis vi har bevist påstandene

1) Formel er riktig for $n = 1$,
2) Formel er riktig for $n \Rightarrow$Formel er riktig for $n+1$,

så viser 1) at den gjelder for $n = 1$. Da kan vi bruke 2) for å vise at den også gjelder for $n = 2$, og 2) enda en gang for å vise at den gjelder for $n = 3$, osv. osv. Altså gjelder formelen for alle n!

Eksempler:

I Tetraedertallene

Se også oppgave 213 (som henviser til oppgave 205) i løsningsforslagene.

Figuren til oppgave 213 side 333 er feil for $n = 3$. "Grunnflaten" skal ha "kuler" også på midten av sidene, slik at det er 6 (3dje trekanttall) "kuler" i "grunnflaten".

Tetraedertallene er summer av trekanttall:

$T_1 = \Delta_1 = 1$
$T_2 = \Delta_1 + \Delta_2 = 1 + 3 = 4$
$T_3 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 1 + 3 + 6 = 10$
osv.

Vi vet at $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Trekanttallene er summer av naturlige tall, som utgjøre en aritmetisk rekke.)

Formelen for tetraedertallene er $T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = f(n)$
La oss bevise dette med induksjonsbevis:

$\underline{n = 1\ :}$

$f(1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 = T_1$ OK!

$\underline{n \rightarrow n+1\ :}$

Antar at $f(n)$ er riktig for n, må vise at formelen gjelder for $n+1$, altså at $f(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$

$$f(n+1) = f(n) + \Delta_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} =$$
$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3\cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{6} =$$
$$(n+1)(n+2)\frac{(n+3)}{6} = \qquad \text{(Tar ut felles faktor } (n+1)(n+2)\text{!)}$$
$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} QED$$

II Pyramidetallene

Se også oppgave 229 i løsningsforslagene!

Pyramidetallene er summer av kvadrattall:

$P_1 = 1$
$P_2 = 1 + 2^2 = 5$
$P_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 14$
$P_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
$\ldots$
$P_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$

Formelen her er $P_n = f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, noe som er litt brysomt å bevise direkte, så vi bruker induksjonsbevis:

$\underline{n = 1:}$

$f(1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1 = P_1$ OK!

$\underline{n \to n+1:}$

Antar at $f(n)$ er riktig for n, må vise at formelen gjelder for $n+1$,
altså at $f(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$f(n+1) = f(n) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} =$$
$$\frac{(n+1)[(n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$$
$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} QED$$

III Sum av kubikktall

Nå vet vi summen av kvadrattallene, kunne være morsomt å bevise en formel også for kubikktallene!

Det er bevist med induksjonsbevis i oppgave 280 i løsningsforslagene.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Dette er litt morsomt da $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\frac{n(n+1)}{2})^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$, eller sagt med ord:

Summen av kubikktallene er kvadratet av summen av de naturlige tallene!