Versjon: 11.09.14 - Rettet feil i 204, 261 og 270 og lagt inn litt om GeoGebra-bruk

Kommentarer til oppgaver;

204, 205, 210, 213, 215, 225, 229, 237, 245, 246, 254, 259, 261, 270, 274, 278, 280,281

204

a) Trykkfeil i D-kolonne første rad, skal være 3.
Mønster rimelig opplagt, teller oppover, skifter retning og startsted for hver linje...

b) Kolonne B: 1,7,9,15,...
Legger til 6 og 2 annenhver gang.
Kan dele opp:
Ulike rader (1,3,5,7...): Aritmetisk følge: 1,9,17,...
Like rader (2,4,6,...): Aritmetisk følge: 7,15,23, ...
Altså:

$$\left\{ \begin{array}{c} b_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3, n \in Ulike \\ b_n = 3 + 4(n-1) = 4n - 1, n \in Like \end{array} \right\}$$

$n = 1000$(like): $b_n = 4 \cdot 1000 - 1 = 3999$
Raden starter i A og avtar mot høyre:$4 * 999 - 3 = 3993$

A	B	C	D	E
4000	3999	3998	3997	

c) $1000 = 4n - 3 \Rightarrow n = \frac{997}{4} = 249.25$
$1000 = 4n - 1 \Rightarrow n = \frac{1001}{4} = 250.25$
Rad $n = 250$ (like) gir: $4 \cdot 250 - 1 = 999$
Teller ned fra A mot høyre i rad $n = 250$: 1000,**999**,998,997
Altså i A-kolonne på rad 250.
(Kontroll:
$n = 249$ (ulike) gir: $4 \cdot 249 - 3 = 993$
Teller opp fra B mot høyre i rad $n = 249$: **993**,994,995,996
$n = 251$ (ulike) gir: $4 \cdot 251 - 3 = 1001$
Teller opp fra B mot høyre i rad $n = 251$: **1001**,1002,1003,1004)

205

a) Mønster: Hvert tall er summen av tallene over (skrått opp til høyre og venstre).
(Må tenke oss at oppstillingen er rammet inn av nuller.)

b) Jeg stiller opp i en mer rektangulær tabell:

n\r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Mønsteret blir da mer: "Hvert tall er summen av tallet over til venstre og tallet over,
eller uttrykt ved radnummer n og kolonnenummer r:

$$p(n,r) = p(n-1, r-1) + p(n-1, r)$$

Tallene i Pascals trekant kalles binomiske koeffisienter og noteres $\binom{n}{4}$, ***uten brøkstrek!***

Da kan vi skrive: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-4} + \binom{n-1}{r}$

$\binom{7}{4}$ betyr egentlig $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 35$ og kan regnes ut med **7 nCr 4** på lommeregner.
(**MATH,PRB,3:nCr**)

c) 3 dje tall fra høyre er lik 3dje tall fra venstre, altså $\binom{99}{2} = 4851 = \binom{99}{97}$

d) Summen av en diagonal er tallet rett under siste tall i diagonalen.
Eksempelvis er summen av fire trekanttall, markert med grønt i figuren,
lik tallet under 10, altså $20 = \binom{6}{3}$.
(Generelt er summen av n trekanttall: $\binom{n+2}{n-1}$, da det siste tallet i summen ligger i $n+1$ rad i $n-1$ kolonne.

$$\binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)...4}{(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)...4\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-1)!3\cdot2\cdot1} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!3\cdot2\cdot1} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} =$$
$$\binom{n+2}{3} = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

Legg merke til at vi her kunne brukt symmetriregelen; $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ til å
komme fra $\binom{n+2}{n-1}$ til $\binom{n+2}{3}$: $\binom{n+2}{n-1} = \binom{n+2}{n+2-(n-1)} = \binom{n+2}{3}$

Bevis for symmetriregel:

$$VS = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$
$$HS = \frac{n(n-1)...(n-(n-r)+1)}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)...(r+1)}{(n-r)!}\frac{r!}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Se også oppgave 213!)

210

a)
$L_1 = 30000\cdot0.8 + 8000 = 32000$
$L_2 = 32000\cdot0.8 + 8000 = 33600$
$L_3 = 33600\cdot0.8 + 8000 = 34880$
$L_4 = 34880\cdot0.8 + 8000 = 35904$
...
b)

Rekursivt:

$L_1 = 32'$

$L_n = L_{n-1} \cdot 0.8 + 8'$

c)

På lommeregner:

32	ENTER	
Ans*0.8+8	ENTER	33.6
ENTER		34.88
...		
ENTER		40

):

$\lim_{n \to \infty} L_n = 40$

GeoGebra (CAS eller kommandolinje):

IterasjonListe[x 0.8 + 8000,32,10]
gir:
{32, 33.6, 34.88, 35.9, 36.72, ..., 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40}

TI lommeregnere har også støtte for rekursive definisjoner:

MODE, Seq (istedenfor Func i fjerde linje)

Y=

u(n)=u(n-1)*0.8+8

u(nMin)=32

Da kan vi regne ut:

u(1)	32
u(2)	33.6
u(50)	39.99985728
u(100)	40
u(1000)	40

Jeg har en viss tro på at slike "uttak av bestand" problemer kan bli en gjenganger til eksamen i R2,
så la oss analysere dette, slik at dere kan imponere sensor:

$L_1 = L_1$

$L_2 = L_1 * k + a$

$L_3 = (L_1 * k + a) * k + a = a + ka + k^2 L_1$

$L_4 = (a + ka + k^2 L_1) * k + a = a + ka + k^2 a + k^3 L_1$

$\ldots$

$L_n = (a + ka + k^2 a + \ldots + k^{n-2} a) + k^{n-1} L_1 =$

$\sum_{i=1}^{n-1} a k^{i-1} + k^{n-1} L_1 =$

$a \frac{k^{n-1}-1}{k-1} + k^{n-1} L_1$

Altså summen av en geometrisk rekke med $n - 1$ ledd, med a som første ledd og kvotient k, pluss leddet $k^{n-1} L_1$.
Vi har funnet et eksplisitt uttrykk for L_n!

Hvis $k < 1$ vil siste ledd gå mot 0 og den geometriske rekken mot $\frac{a}{1-k}$

I denne oppgaven blir $\frac{a}{1-k} = \frac{8}{1-0.8} = 40$

213 Tetraedertallene

Obs: Figuren for** $3'$**dje tetredertall er gal, skal være kuler midt på sidene i grunnflaten!

a) Tegning viser at $T_4 = 20$

c) $T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$ eller: Tetraedertallene er summen av de n første trekanttallene, som vi tidligere har vist har $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$: $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

b) Vi har derfor tetraedertallene: $1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots$

c) Se oppgave 205 med Pascals trekant!
Ikke så enkelt å regne ut denne, da T_n er et tredjegradsuttrykk.

Pascals trekant:
Tetraedertallene går på skrå nedover fra cellen i tabellen med $n = 3, r = 0$, så vi finner uttrykket for T_n ved å se systemet:

$$T_1 = \binom{3}{0}$$
$$T_2 = \binom{4}{1}$$
$$T_3 = \binom{5}{2}$$
$$\ldots$$

Altså 2 høyere over og 1 mindre under i den binomiske koeffisienten:

$$T_n = \binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)\ldots(n+2-(n-1)+1)}{(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)\ldots 5 \cdot 4}{(n-1)(n-2)\ldots 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(Med symmetriregelen $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ kunne vi gjort mer direkte:

$$T_n = \binom{n+2}{n-1} = \binom{n+2}{n+2-(n-1)} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Se oppgave 205 for bevis av symmetriregel.)

Kan også bruke regresjon på lommeregner:

TI lommeregner:
Vet at det er et tredjegradsuttrykk, så vi trenger 4 punkter:
$\{1, 2, 3, 4\}$**STO**>L1
$\{1, 4, 10, 20\}$**STO**>L2 (Eller legge inn med STAT, EDIT...)

STAT, CALC, CubicReg L1, L2
gir:

$$0.1666\ldots x^3 + 0.5x^2 + 0.333\ldots x - 3.7E.12$$

som egentlig eksakt er:

$$T_n = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} + 0 = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n\left(n^2+3n+2\right)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$$

GeoGebra (CAS eller kommandolinje):
RegPoly[{(1,1),(2,4),(3,10),(4,20)},3]
gir:
0.167x³ + 0.5x² + 0.333x

215 Femkanttallene

Femkant-tallene:

a), b)
Vi får tabellen:

n :	1	2	3	4	5	6	7	8	…	n	$n+1$
F_n :	1	5	12	22	35	51	70	92	…		
Differanser, d_n :	4	7	10	13	16	19	22		…	$3n+1$	

Ved å se på differansene $4, 7, 10, 13, \ldots$ ser vi at de er en aritmetisk følge:
$a_n = a_1 + d(n-1) = 4 + 3(n-1) = 3n+1$
Ved å fortsette å legge til differanser får vi de første 8 femkanttallene.

b) Dette mønsteret har vi egentlig allerede sett i a):
$F_2 = 1 + 4 = 5 = F_1 + d_1$
$F_3 = 5 + 7 = 12 = F_2 + d_2$
$F_4 = 12 + 10 = 22 = F_3 + d_3$
…
$F_n = F_{n-1} + d_{n-1}$

Så vi får den rekursive formelen:

c) $$\left\{ \begin{array}{c} F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + d_{n-1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + 3(n-1) + 1 = F_{n-1} + 3n - 2 \end{array} \right\}$$
eller
$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + d_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + 3n + 1 \end{array} \right\}$$

d) Eksplisitt formel på forskjellige måter

I Figurer:

e), f) Figuren i boken viser at $F_4 = \Delta_4 + 2\Delta_3$
Så vi generaliserer til: $F_n = \Delta_n + 2\Delta_{n-1} =$
$\frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2+n+2n^2-2n}{2} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

II Figurer: (Hustall-variant)

g) Figuren viser at $F_n = Kvadrattall + "Taktall" =$ ("Rett opp veggene" i femkanttallene!)
$n^2 + \Delta_{n-1} = n^2 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n^2+n^2-n}{2} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

III Differanseformel:

Hvis differansene er aritmetiske eller geometriske, kan vi bruke denne formelen:

$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ Kan finne a_n ved å starte med a_1 og legge til alle mellomliggende differanser!

$$F_n = F_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 1 + \tfrac{n-1}{2}(d_1 + d_{n-1}) = 1 + \tfrac{n-1}{2}(4 + (3(n-1) + 1)) =$$
$$1 + \tfrac{n-1}{2}(4 + 3n - 3 + 1) = 1 + \tfrac{n-1}{2}(3n + 2) = \tfrac{2+3n^2-3n+2n-2}{2} = \tfrac{3n^2-n}{2} = \tfrac{n(3n-1)}{2}$$

IV Regresjon på lommeregner:

Differansene er av første grad, så femkanttallene er av andre grad, trenger da 3 punkter:
$\{1,2,3\}$**STO**>L1
$\{1,5,12\}$**STO**>L2 (Eller legge inn med STAT, EDIT...)

STAT, CALC, QuadReg L1, L2
gir:
$1.5n^2 - 0.5n = \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{n}{2} = \tfrac{3n^2-n}{2} = \tfrac{n(3n-1)}{2}$

Geogebra (CAS eller kommandolinje):
RegPoly[{ (1,1), (2,5), (3,12) }, 3]
gir:
1.5x² - 0.5x

V Generell teknikk

Denne er det ikke så mange som kan så den er for spesielt interesserte.
Vi tar den når vi kommer til integrasjon og differensialligninger.
Bare gjengitt her som eksempel på en morsom teknikk:
Vi har en regel som minner om derivasjon: $\mathit{diff}(n^{(2)}) = 2n$, $\mathit{diff}(n^{(3)}) = 3n^{(2)}, \ldots$
Obs: $n^{(3)}$ er *fakturell*, ikke potens: $n^{(2)} = n(n-1)$, $n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$

Starter vi med differansene til d_n, altså d_n^2 (andre orden differanser), har vi
$d_n^2 = 3$ (konstanter)

Da blir differansene
$d_n = 3n + c$ (Da $\mathit{diff}(3n + c) = 3 + 0 = 3$, c er en konstant vi bestemmer senere.)

Og videre blir femkanttallene
$F_n = \tfrac{3}{2}n^{(2)} + cn + d$ (Da $\mathit{diff}(\tfrac{3}{2}n^{(2)} + cn + d) = 3n^{(2)} + c + 0 = 3n^{(2)} + c$.
c og d er konstanter som vi bestemmer senere.)

Vi bestemmer c og d med
$F_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \tfrac{3}{2} \cdot 1 \cdot 0 + c \cdot 1 + d \Leftrightarrow c + d = 1$
$F_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = \tfrac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1 + c \cdot 2 + d \Leftrightarrow 2c + d = 5$
To ligninger med to ukjente gir $c = 1$ og $d = 0$, så vi får:
$F_n = \tfrac{3}{2}n^{(2)} + n = \tfrac{3n(n-1)}{2} + \tfrac{2n}{2} = \tfrac{3n^2-3n+2n}{2} = \tfrac{3n^2-n}{2} = \tfrac{n(3n-1)}{2}$

225

For å illustrere bruk av lommeregner når man skal regne ut summen av rekker når man mangler

formler:
n'te ledd i tilsvarende tallfølge:
$a_n = \frac{1}{(n-1)!}$
(Husk at $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\ldots 2 \cdot 1$ og at $0! = 1$ pr. definisjon/konvensjon.)

Y1=1/(X-1)! Bruker X som n.

LIST, OPS, 5:seq(Y1,X,1,50) gir de første 50 leddene i følgen:
{1, 1, 0.5, 0.1666 ... }

LIST,5:sum(Ans) summerer disse 50 leddene:
2.71828...

For å finne $\sum_{i=1}^{100} a_i$ kunne man i prinsippet brukt seq(Y1,X,1,100),
men det går ikke da fakultet av tall over 69 blir for store for lommeregneren
Vi kan derfor si at leddene etter $n = 69$ blir så små at
$\sum_{i=1}^{100} a_i \approx \sum_{i=1}^{69} a_i = 2.71828\ldots = e$ (Eulers tall!)

Med GeoGebra CAS:
a(n):=1/(n-1)!
Følge[a(i),i,10] gir {1, 1, 0.5, 0.167, 0.042, 0.008, 0.001, 0, 0, 0}
S(n):=sum(a(i),i,1,n)
S(10) gir 2.71828

229

a) og b):
$p_2 = 1 + 2^2 = 5$
$p_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 5 + 3^2 = 14$
$p_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 14 + 4^2 = 30$
$p_5 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \; = 30 + 5^2 = 55$
osv.

c) Lommeregner:
sum(seq(X ^2,X,1,50))=42925

sum(seq(X^2,X,1,100)=338 350

(Vanskelig å finne generell formel, men den er: $p_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

For spesielt interesserte:
Den generelle teknikken i oppgave 215 side 5 i dette dokumentet kan også brukes her:
Vi har en regel som minner om derivasjon: $\mathit{diff}(n^{(2)}) = 2n$, $\mathit{diff}(n^{(3)}) = 3n^{(2)}, \ldots$
Obs: $n^{(3)}$ er fakturell, ikke potens: $n^{(2)} = n(n-1)$, $n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$

Her er differansene kvadrattallene, så vi får: $\mathit{diff}(p_n) = (n+1)^2$
Vi må få på fakturell-form, så vi omformer litt:
$\mathit{diff}(p_n) = n^2 + 2n + 1 = n(n-1) + 3n + 1 = n^{(2)} + 3n + 1$
Ved å bruke reglene baklengs får vi pyramidetallene:
$$p_n = \frac{1}{3}n^{(3)} + \frac{3}{2}n^{(2)} + n + c$$ (c er en konstant vi bestemmer senere)

Vi vet at $p_1 = 1$, så vi har en ligning for å bestemme c: $1 = 0 + 0 + 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

):
$p_n = \frac{1}{3}n^{(3)} + \frac{3}{2}n^{(2)} + n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{3n(n-1)}{2} + n = \frac{2n(n-1)(n-2)+9n(n-1)+6n}{6} =$
$\frac{n}{6}(2(n-1)(n-2) + 9(n-1) + 6) =$
$\frac{n}{6}(2n^2 - 6n + 4 + 9n - 9 + 6) = \frac{n}{6}2(n+1)(n+\frac{1}{2}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Geogebra CAS:
a(n):=n ^2
Følge[a(i),i,1,10] gir: {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
S(n):=Sum(a(i),i,1,n) gir: S(n):=(2n³ + 3n² + n) / 6
Faktoriseringsknapp gir: 1 / 6 (2n + 1) (n + 1) n

237

Aritmetisk følge: $p_1 = 20, d = 2, n = 12$

$p_n = p_1 + d(n-1) = 20 + 2(n-1) = 2n + 18$

a) Plasser på 12'te rad: $p_{12} = 2 \cdot 12 + 18 = 42$

b) Plasser totalt: $S_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{n}{2}(p_1 + p_n) \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}(20 + 42) = 372$

245

a)
$\sum_{n=1}^{5} a_n = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = 5 \Leftrightarrow a_1 + a_5 = 2 \quad I$
$\sum_{n=1}^{11} a_n = 77 \Leftrightarrow \frac{11}{2}(a_1 + a_{11}) = 77 \Leftrightarrow a_1 + a_{11} = 14 \quad II$

Hmm, vi har 2 ligninger med 3 ukjent, må i tillegg bruke:
$a_n = a_1 + d(n-1)$ som gir:

$a_5 = a_1 + 4d$ og $a_{11} = a_1 + 10d$

som innsatt i I og II gir:

$2a_1 + 4d = 2$
$2a_1 + 10d = 14$

Løsning: $d = 2$ og $a_1 = -3$
b)
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + d(n-1))) = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1)) = \frac{n}{2}(2(-3) + 2(n-1)) = n^2 - 4n$
c)
$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 + d(i-1) = \sum_{i=1}^{n} -3 + 2(i-1) = \sum_{i=1}^{n} 2i - 5$
(Men hvorfor, $n^2 - 4n$ er da mye bedre...)

246

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+1} + \ldots$

Aritmetisk:

$a_1 = \frac{1}{x+1}$

$d = a_2 - a_1 = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{(x+y)(x+1)} - \frac{1(x+y)}{(x+1)(x+y)} = \frac{1-y}{(x+y)(x+1)}$

$a_2 = a_1 + d \Leftrightarrow$

$\frac{1}{y+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1-y}{(x+y)(x+1)} \Leftrightarrow \frac{(x+y)(x+1)}{(y+1)(x+y)(x+1)} = \frac{(x+y)(y+1)+(1-y)(y+1)}{(y+1)(x+y)(x+1)} \Leftrightarrow$

$\frac{(x+y)(x+1)-(x+y)(y+1)-(1-y)(y+1)}{(y+1)(x+y)(x+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(y+1)(x+y)(x+1)} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ($x = -1$ gir null i nevner)

Da blir også $y = 1$ og all leddene blir 1.

254

$a_1 = 3.8$ [l], $k = 0.95$

$a_n = a_1 k^{n-1} = 3.8 \cdot 0.95^{n-1} = 3.8 \frac{0.95^n}{0.95} = 4.0 \cdot 0.95^n$

Renner ut i 60 sekunder: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{k^n-1}{k-1} = 3.8 \frac{0.95^{60}-1}{0.95-1} \approx 72.5$ [l]

Hvis formelen gjaldt videre, ville det være tomt når det har rent ut: $S_\infty = \frac{a_1}{1-k} = \frac{3.8}{1-0.95} = 76$ [l]
Akvariet ville i så fall inneholdt 76 liter i utgangspunktet!

259

$År$:	1981	1982	1983	…	1989	1990
n :	1	2	3	…	9	10
s_n :	$126'$					$54'$

Geometrisk: $a_1 = 126, a_{10} = 54$

$a_{10} = a_1 k^{10-1} \Leftrightarrow \frac{a_{10}}{a_1} = k^9 \Leftrightarrow k = \sqrt[9]{\frac{54}{126}} \approx 0.91$

Samlet utslipp: $S_{10} = a_1 \frac{k^{10}-1}{k-1} = 126 \cdot \frac{0.91^{10}-1}{0.91-1} \approx 855000$ (tonn)

261

a)

Alt. 1: Nåverdi: 4999 kr.

Alt. 2: Nåverdi: $\frac{499}{1.0045^3} + \frac{499}{1.0045^4} + \ldots + \frac{499}{1.0045^{14}}$

Geometrisk rekke: $a_1 = \frac{499}{1.0045^3}, k = \frac{1}{1.0045}$

$S_{12} = \frac{499}{1.0045^3} \frac{(\frac{1}{1.0045})^{12}-1}{\frac{1}{1.0045}-1} \approx 5765$ [kr]

b)

Alt 3: Nåverdi: $\frac{499}{1.0045^{12}} + \frac{499}{1.0045^{13}} + \ldots + \frac{499}{1.0045^{23}}$

Geometrisk rekke: $a_1 = \frac{499}{1.0045}, k = \frac{1}{1.0045}$

$S_{12} = \frac{499}{1.0045^{12}} \frac{(\frac{1}{1.0045})^{12}-1}{\frac{1}{1.0045}-1} \approx 5536$ [kr] (Lønner seg fremdeles ikke...)

c)

Regner som om oppgaven mener de to *første* alternativene i a):

$$4999 = \frac{x}{1.0045^3}\frac{(\frac{1}{1.0045})^{12}-1}{\frac{1}{1.0045}-1} \Leftrightarrow 4999 = 11.55x \Leftrightarrow x = \frac{4999}{11.55} \approx 433 \text{ [kr]}$$

270

Oppgaven utdyper et viktig poeng:
Geometriske rekker konvergerer når:
$-1 < k < 1$ eller når $a_1 = 0$ (som kan skje for visse verdier av x)
a)
$(2+x) + (2+x)(2x-3) + (2+x)(2x-3)^2 + \ldots$
Geometrisk rekke: $a_1 = 2+x, k = 2x-3$
1) $x = -2 : a_1 = 0; \quad S = 0 + 0 + \ldots = 0$ (Altså konvergent.)
2) $|k| < 1 \Leftrightarrow |2x-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x-3 < 1 \Leftrightarrow 1 < x \wedge x < 2 \Leftrightarrow x \in \langle 1, 2\rangle$
3) $x \in \{-2\} \cup \langle 1, 2\rangle$ (Se 1) og 2)!)

b)
1) Tilsvarende a)...
2)
$(x+5) + \frac{(x+5)x}{x+1} + \frac{(x+5)x^2}{(x+1)^2} + \ldots$
Geometrisk rekke: $a_1 = x+5, \quad k = \frac{x}{x+1}, \quad x \neq -1$
Konvergens hvis alle ledd er null: $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$
Dessuten når $-1 < k < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x}{x+1} < 1 \Leftrightarrow$
$0 < \frac{x}{x+1} + 1 \wedge \frac{x}{x+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{x+x+1}{x+1} \wedge \frac{x-(x+1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow$
$0 < \frac{2x+1}{x+1} \wedge \frac{-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x \in \langle \leftarrow, -1\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
$x \in \langle -\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$
Konvergensområde: $\{-5\} \cup \langle -\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$ (Feil i fasit...)
$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{x+5}{1-\frac{x}{x+1}} = \frac{x+5}{1-\frac{x}{x+1}} = x^2 + 6x + 5, \quad x \notin \{-5, -1\}$
$S = 0, \quad x = -5$
c)
$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3x-1}{2x+1}, \quad x \neq -\frac{1}{2}$
$x = \frac{1}{3}$:
$S = (2\frac{1}{3} + 1) + 0 + 0 + \ldots = \frac{5}{3}$
$x \notin \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$:
Konvergens: $-1 < \frac{3x-1}{2x+1} < 1 \Leftrightarrow x \in \langle 0, 2\rangle$(Tall-linjer)

Konvergensområde: $\langle 0, 2\rangle$ (Tilfellet $\frac{1}{3}$ dekkes av dette.)

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2x+1}{1-\frac{3x-1}{2x+1}} = \frac{4x^2+4x+1}{2-x} = \frac{(2x+1)^2}{2-x}$$

274

Regner som om man inntar en tablett i starten av hvert døgn og ser på totalt nivå etter inntak av n'te tablett.
(Viktig å presisere slike ting da oppgaver ofte er litt upresise her.
I b) sies det: "...har 125 mg av det virksomme stoffet i kroppen.", som om nivået er konstant.
Men nivået varierer gjennom et døgn, poenget er hva *maksverdien* stabiliserer seg på!)
a)

Får geometrisk rekke hvor summen må være under grensen (lag tabell!):

$$1.5 + 1.5k + 1.5k^2 + \ldots \leq 10 \Leftrightarrow \frac{1.5}{1-k} \leq 10$$
$\frac{1.5}{1-k} \leq 10 \Leftrightarrow k < 0.85$
Må altså bryte ned 15% i døgnet.
b)
Regner som om maksimalt, stabilt nivå er 125 mg rett etter inntak av siste tablett:
x : Virkestoff i en tablett gir:
$$x + x0.2 + x0.2^2 + \ldots = 125 \Leftrightarrow \frac{x}{1-0.2} = 125 \Leftrightarrow x = 100 \text{ mg}$$

278

a) Figur...

Vi får:

n :	$(1,2,3)$	4	5	6	$\ldots$
d_n :	$(ikkeaktuelt)$	2	5	9	$\ldots$

b)
Rekursiv formel: $\left\{ \begin{array}{c} M_4 = 2 \\ M_{n+1} = M_n + n - 1 \end{array} \right\}$
Hver gang vi legger til et hjørne får vi n streker til foregående hjørner.
To av disse blir sider i ny mangekant og må trekkes fra,
samtidig blir en av foregående sider en ny diagonal,
netto tilvekst av diagonaler blir altså: $n - 2 + 1 = n - 1$
c)
$M_n = \frac{n(n-3)}{2}$

Induksjonsbevis:

I $\quad M_4 = \frac{4(4-3)}{2} = 2 \quad$ Ok!
II $\quad$ Må vise at $M_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

$$M_{n+1} = M_n + n - 1 = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-3)+(n-1)2}{2} = \frac{n^2-3n+2n-2}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} \quad \text{Ok!}$$

Induksjonsbevis kan brukes vi har gjettet at $M_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Har to metoder å finne denne formelen på direkte:

Lommeregner:
Vi merker oss at differansene mellom ledd er $n - 1$ altså en aritmetisk rekke (første grads polynomuttrykk).
Da blir M_n et andregradsuttrykk, som vi også kan finne på lommeregner med:
$\{4,5,6\}$**STO**>L1
$\{2,5,9\}$**STO**>L2
QuadReg L1, L2
Hvilket gir: $M_n = 0.5n^2 - 1.5n = 0.5n(n-3) = \frac{n(n-3)}{2}$

Ved regning:

Generell regel: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$, der d_i er uttrykket for differansene til følgen a_n.
Regelen sier egentlig: Vi kan starte med første ledd og legge til alle differansene opp til a_n, og da har vi i a_n!
Hvis differansen d_i er en geometrisk eller aritmetisk følge er det derfor enkelt å finne et eksplisitt uttrykk for a_n!

Her starter vi på $n = 4$ så i dette tilfellet har vi en litt modifisert formel:

$M_n = M_4 + \sum_{i=4}^{n-1} d_i$ (Utgangspunkt + alle mellomliggende differanser)
Her har differansene formelen: $d_n = n - 1$
Summen av $n - 4$ differanser blir:
(Sum aritmetisk følge alltid antall ledd multiplisert med summen av første og siste ledd dividert på 2!)

$$\sum_{i=4}^{n-1} d_i = \frac{n-4}{2}(d_4 + d_{n-1}) = \frac{n-4}{2}(3 + (n-1) - 1)) = \frac{(n+1)(n-4)}{2}$$

Så vi får: $M_n = M_1 + \sum_{i=4}^{n-1} d_i = 2 + \frac{(n+1)(n-4)}{2} = \frac{4+n^2+n-4n-4}{2} = \frac{n^2-3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$

280

a) Det som står er:

$\sum_{n=1}^{n} i^3 = (\sum_{n=1}^{n} i)^2$ eller $\sum_{n=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

I

$n = 1$: VS og HS blir 1, Ok!

II

Antar det gjelder for *n*, må da vise at: $\sum_{n=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$$\sum_{n=1}^{n+1} i^3 = \sum_{n=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$
$$\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^3 4}{4} = \frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2(n+1)4}{4} =$$

(Ikke multipliser ut mer enn nødvendig...)

$$\frac{(n+1)^2[n^2+(n+1)4]}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2+4n+4]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$ Ok!

b)

I

$n = 1$: VS=0 og HS=0, Ok!

II

Antar at det gjelder for *n*, må da vise at:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(i-1)(i+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)-1)(2(n+1)+5)}{12} = \frac{(n+1)n(2n+7)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(i-1)(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i+1)}{2} + \frac{((n+1)-1)((n+1)+1)}{2} =$$
$$\frac{n(n-1)(2n+5)}{12} + \frac{n(n+2)}{2} = \frac{n(n-1)(2n+5)+6n(n+2)}{12} =$$

(Ikke multipliser ut mer enn nødvendig...)

$$\frac{n[(n-1)(2n+5)+6(n+2)]}{12} = \frac{n(2n^2-2n+5n-5+6n+12)}{12} =$$
$$\frac{n(2n^2+9n+7)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+7)}{12}$$ Ok!

281

a)

I $n = 1$: $VS = a_1$ $HS = a_1$ Ok!

II

Antar at $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ gjelder for n, må da vise at
$S_{n+1} = \frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{n(a_1+a_n)}{2} + a_{n+1} = \frac{na_1+na_n+2a_{n+1}}{2} =$
(Et lite triks for å utnytte $a_{n+1} = a_1 + nd$...)
$\frac{na_1+n(a_{n+1}-d)+a_{n+1}+a_{n+1}}{2} = \frac{na_1+na_{n+1}-nd+a_{n+1}+a_{n+1}}{2} =$
$\frac{na_1+na_{n+1}-nd+a_1+nd+a_{n+1}}{2} = \frac{(n+1)a_1+(n+1)a_{n+1}}{2} = \frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}$ Ok!

b)

I $n = 1$: $VS = a_1$ $HS = a_1$ Ok!

II

Må vise at: $S_{n+1} = a_1 \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = a_1 \frac{k^n-1}{k-1} + a_{n+1} = a_1 \frac{k^n-1}{k-1} + a_1 k^{(n+1)-1} =$
$a_1 (\frac{k^n-1}{k-1} + k^n) = a_1 \frac{k^n-1+k^n(k-1)}{k-1} = a_1 \frac{k^n-1+k^{n+1}-k^n}{k-1} =$
$a_1 \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$ Ok!