R2 - 01.09.14 - *Løsningsskisser*

Algebra

Oppgave 1

Finn den *eksplisitte* formelen for n'te ledd i tallfølgene:
a) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$
b) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
c) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$
d) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$

a) Vi ser at følgen med like-tallene har verdi lik det dobbelte av indeksen;
$l_n = 2n$

b) Følgen med ulike tall er en mindre enn liketallene, altså;
$u_n = 2n - 1$

c) Alle tallene er kvadrattall;
$k_n = n^2$

d) Nevner lik indeks, teller en større;
$a_n = \frac{n+1}{n}$

Kontroll av svar:
Sett inn tall i formler og test om du får tallene i følgen.
GGB på 1d):
Følge[(n+1)/n,n,1,10] gir svaret $\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}\}$

Oppgave 2

Finn den rekursive formelen for tallfølgene:
a) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
b) $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$
c) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$
d) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

a) Differansen mellom leddene er $d_n = a_{n+1} - a_n = 2$, så vi har;
$\{u_1 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + 2\}$ (eller: $u_n = u_{n-1} + 2$)

b) Vi multipliserer hvert ledd med 3;
$\{a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n \cdot 3\}$ (eller: $a_n = a_{n-1} \cdot 3$)

c) Differansene blir: $3, 5, 7, 9, \ldots$, altså ulike tall som starter med 3,
så vi bruker $2n + 1$ istedenfor $2n - 1$;
$\{k_1 = 1, \quad k_{n+1} = k_n + 2n + 1\}$ (eller: $k_n = k_{n-1} + 2n - 1$)

Kunne også regnet ut differansen som et uttrykk:
$d_n = k_{n+1} - k_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

d) Trekanttallene, har $2, 3, 4, 5, \ldots$ som differanse, altså de naturlige tallene fra 2 og oppover: $d_n = n + 1$;
$\{t_1 = 1, \quad t_{n+1} = t_n + n + 1\}$ (eller: $t_n = t_{n-1} + n$)

Oppgavene a) og b), hvor uttrykket ikke avhenger av n, kan regnes ut med:

f(x):=x+2 (legger til 2 hver gang, leddet foran symboliseres med x.)
IterasjonListe[f(x),1,10] gir da: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$

Tilsvarende for b):

f(x):=x 3 (Multipliserer med 3 hver gang.)
IterasjonListe[f(x),1,10] gir da:
$\{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049\}$

Oppgave 3

En tallfølge har den eksplisitte formelen $a_n = 4n - 3$ for n'te ledd.
a) Finn de fem første leddene.
b) Finn en rekursiv formel for tallfølgen.

a) Setter inn og får: a_n : $1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots$
(GGB:
a(n):=4 n-3
Følge[a(n),n,1,10] gir $\{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37\}$)

b) Ser at differansen er 4: $\{a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 4\}$
(GGB: **a(n+1)-a(n)** gir 4)

Oppgave 4

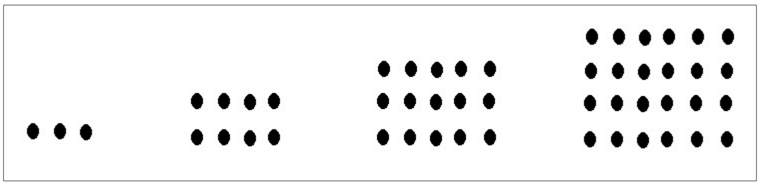
En tallfølge har den eksplisitte formelen $a_n = \frac{n^2-1}{n}$ for n'te ledd.
Regn ut for hånd: $\sum_{i=1}^{3} a_i$.

$\sum_{i=1}^{3} a_i = \frac{1^2-1}{1} + \frac{2^2-1}{2} + \frac{3^2-1}{3} = 0 + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{9+16}{6} = \frac{25}{6}$

Med GGB:
a(n):=(n ^2-1)/n
Sum(a(n),n,1,3) gir da $\frac{25}{6}$

Oppgav 5

Gitt figurtallene: $3 \cdot 1, 4 \cdot 2, 5 \cdot 3, 6 \cdot 4, \ldots$, en tallfølge som kan illustreres av figuren:



Finn eksplisitt og rekursiv formel for n'te ledd.

Rektangeltall med høyde lik indeks og bredde som er 2 større enn indeksen;

$a_n = n(n+2)$

Differansen:

$d_i = a_{n+1} - a_n = (n+1)(n+1+2) - n(n+2) = (n+1)(n+3) - n(n+2) =$
$n^2 + n + 3n + 3 - n^2 - 2n = 2n + 3$

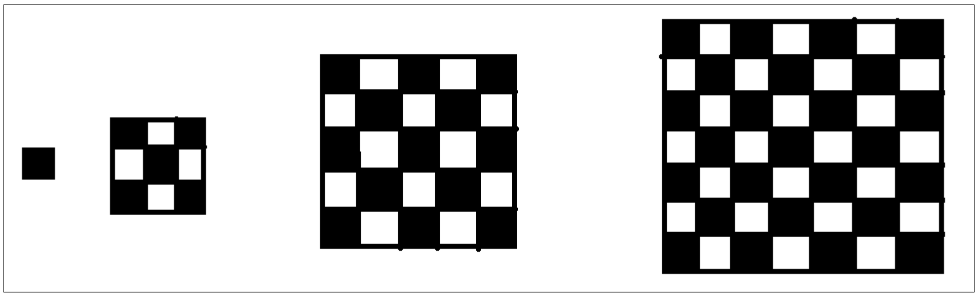
$\{a_1 = 3, \quad a_{n+1} - a_n = 2n + 3\}$

GGB:

a(n):=n (n+2)
Følge[a(n),n,1,10] gir: $\{3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120\}$
a(n+1)-a(n) gir: $2n + 3$

Oppgave 6

Se på figuren under, der vi har tegnet rutemønstre der det alltid er svarte ruter i hjørnene:



Tallfølgen: $1, 5, 13, 25, \ldots$ skal representere antallet svarte ruter totalt i hver figur og indeksen n skal være antall svarte ruter langs nedre kant i hvert figur.
a) Finn rekursiv formel for tallfølgen.
b) Finn eksplisitt formel for n'te ledd i tallfølgen.

Differansene blir 4,8,12,..., så vi gjetter på $d_n = 4n$ og får;

$\{a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 4n\}$

$n = 1$: 1 rad med 1 svart(, og 0 rader med 0)
$n = 2$: 2 rader med 2, og 1 rad med 1
$n = 3$: 3 rader med 3, og 2 rader med 2
Mønsteret ser ut til å bli:

Hver figur består av n rader med n svarte og n-1 rader med n-1 svarte, eller
$a_n = n^2 + (n-1)^2 = n^2 + n^2 - 2n + 1 = 2n^2 - 2n + 1$

GGB:

a(n):=n^2+(n-1)^2
Følge[a(n),n,1,10] gir da: $\{1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181\}$
a(n+1)-a(n) gir: $4n$

Oppgave 7

Vi ser på tallfølgen beskrevet av den eksplisitte formelen $a_n = 3n - 2$;

$1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$

Vi lager tilsvarende rekke:

$S(n) = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + \ldots + 3n - 2$

som vi gjør om til:

$S(n) = 1 + (1 + 3) + (1 + 3 \cdot 2) + (1 + 3 \cdot 3) + (1 + 3 \cdot 4) + \ldots + (1 + 3 \cdot (n - 1))$

a) Vis at vi kan skrive:

$S(n) = n + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1)$

b) Bruk a) til å vise at vi får $S(n) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

a) Det er n enere totalt, en for hvert ledd i følgen, slik at vi kan skille ut $n \cdot 1$.
Det som blir igjen, blir da: $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + 3 \cdot (n - 1)$
Setter vi 3 utenfor får vi: $S(n) = n + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1)$ *QED*

b) Summen av de $n - 1$ første naturlige tall er trekanttall nummer $n - 1$,
altså $\frac{(n-1)n}{2}$, slik at vi får:

$S(n) = n + 3\frac{(n-1)n}{2} = n + \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ *QED*

Med GGB:

a(n):=3 n-2

Sum(a(i),i,1,n) gir da: $\frac{3}{2}\mathrm{n}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{n}$

Oppgave 8

Gitt tallfølgen: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots$

a) Forklar hvorfor vi har den eksplisitte formelen $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
(Hint: Er det noen sammenheng mellom nevnerne og trekanttallene?)

b) Vis at vi kan skrive om til: $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c) Tilsvarende rekke kan derfor alternativt skrives om til:

$S(n) = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

Forklar hvorfor summen av n ledd blir $S(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$

d) Hva blir summen av 100 ledd?

e) Hva vil skje med summen når n går mot uendelig?
(Grenseverdien $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1})$)

a) Følgen kan skrives: $\frac{1}{2\cdot 1}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{2\cdot 6}, \frac{1}{2\cdot 10}, \ldots, \frac{1}{2\frac{n(n+1)}{2}}$, da det er trekanttallene som blir igjen etter at 2 er faktorisert ut i nevnerne
Altså har vi:

$a_n = \frac{1}{2\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{n(n+1)}$

b) Litt brøkregning gir: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = a_n$ *QED*

c) Vi ser at $-\frac{1}{2}$ i første ledd går mot $\frac{1}{2}$ i andre ledd,
og $-\frac{1}{3}$ i andre ledd går mot $\frac{1}{3}$ i tredje ledd osv., slik at bare
første $(\frac{1}{1})$ og siste $(-\frac{1}{n+1})$ ledd står igjen;

$S(n) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ *QED*
(Eller: $S(n) = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$)

d) $S(100) = 1 - \frac{1}{100+1} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{101-1}{101} = \frac{100}{101} \approx 0.990$

e) $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, så summen går mot 1 når det blir uendelig mange ledd!

Med GGB kan vi gjøre:

a(n):=1/(n (n+1))
1/n-1/(n+1) gir $\frac{1}{n^2+n}$ (som er lik $\frac{1}{n(n+1)}$)
S(n):=Sum(a(i),i,1,n) gir S(n)=$\frac{n}{n+1}$ (som er lik 1-$\frac{1}{n+1}$)
Grenseverdi(S(n),inf) gir 1 (inf betyr uendelig (∞))