R2 - Kapittel 2 - Algebra

I

a) Hvilken av disse tallfølgene er aritmetiske, geometriske eller ingen av delene?
1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
2. $2, 6, 18, 54, \ldots$
3. $2, 6, 10, 14, \ldots$
4. $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$
5. $\frac{3}{1}, \frac{5}{4}, \frac{7}{9}, \frac{9}{16}, \ldots$

b) Skriv opp uttrykket for n'te ledd (a_n) for følgene i a).
c) Finn summen av 50 ledd i følgene i a).
(Bruk formler og regning for de som er aritmetiske og geometriske, og lommeregneren på de andre.)

Tester om differansene er like for aritmetiske: $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots$
og om kvotientene er like for geometriske: $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots$
1. Hverken aritmetisk eller geometrisk.
2. Geometrisk med $k = 3$.
3. Aritmetisk med $d = 4$.
4. Geometrisk med $k = \frac{2}{3}$.
5. Hverken aritmetisk eller geometrisk.

b) 1. $a_n = \frac{1}{n}$
2. $a_n = a_1 k^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} = 2\frac{3^n}{3^1} = \frac{2}{3}3^n$
3. $a_n = a_1 + d(n-1) = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$
4. $a_n = a_1 k^{n-1} = \frac{3}{2}(\frac{2}{3})^{n-1} = \frac{3}{2}\frac{(\frac{2}{3})^n}{(\frac{2}{3})^1} = \frac{9}{4}(\frac{2}{3})^n$
5. $a_n = \frac{\text{ulike tall}}{\text{kvadrattall}} = \frac{2n+1}{n^2}$

c) 1. sum(seq(1/X,X,1,50)) gir $S_{50} \approx 4.5$
2. $S_{50} = a_1\frac{k^{50}-1}{k-1} = 2\frac{3^{50}-1}{3-1} = 3^{50} - 1 \approx 7.18 \cdot 10^{23}$
3. $a_{50} = 4 \cdot 50 - 2 = 198$
$S_{50} = \frac{50}{2}(a_1 + a_{50}) = 25(2 + 198) = 5000$
4. $S_{50} = a_1\frac{k^{50}-1}{k-1} = \frac{3}{2}\frac{(\frac{2}{3})^{50}-1}{\frac{2}{3}-1} = \frac{3}{2}\frac{(\frac{2}{3})^{50}-1}{-\frac{1}{3}} = -\frac{9}{2}((\frac{2}{3})^{50} - 1) = \frac{9}{2}(1 - (\frac{2}{3})^{50}) \approx 4.5$
5. sum(seq((2X+1)/X ^2,X,1,50)) gir $S_{50} \approx 10.6$

II

Storrøykeren Dusty Stinker røker i dag 60 sigaretter om dagen, men skal avvennes. Avvenningsopplegget går ut på at Stinker hver uke skal redusere forbruket med 5 sigaretter pr. dag.
a) Hvor mange uker går det før Stinker er nede i 10 sigaretter om dagen?
b) Hvor mange uker går det før Stinker er avvent?

a)
Aritmetisk følge: $a_n = a_1 + d(n-1) = 60 - 5(n-1) = 65 - 5n$
$a_n = 10 \Leftrightarrow 65 - 5n = 10 \Leftrightarrow n = \frac{65-10}{5} = 11$
DS er altså nede i 10 om dagen i den 11te uken, d.v.s. 10 uker fra i dag.

b) $a_n = 0 \Leftrightarrow 65 - 5n = 0 \Leftrightarrow n = \frac{65}{5} = 13$
DS er altså avvent i den 13de uken, d.v.s. 12 uker fra i dag.

III

I en geometrisk rekke er $a_2 = 3$ og $a_4 = \frac{3}{16}$.
Hva er uttrykket for n'te ledd (a_n) og summen av n ledd (S_n)?
Hvorfor konvergerer denne rekken og hva konvergerer den mot?

a)
$k = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \Leftrightarrow a_3^2 = a_2 a_4 = 3 \cdot \frac{3}{16} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow a_3 = \pm\frac{3}{4}$
$k = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\pm\frac{3}{4}}{3} = \pm\frac{1}{4}$
$a_1 = \frac{a_2}{k} = \frac{3}{\pm\frac{1}{4}} = \pm 12$
$a_n = a_1 k^{n-1}$
Altså enten $a_n = 12(\frac{1}{4})^{n-1} = 12\frac{(\frac{1}{4})^n}{(\frac{1}{4})^1} = 48\frac{1}{4^n}$
eller $a_n = -12(-\frac{1}{4})^{n-1} = -12\frac{(-\frac{1}{4})^n}{(-\frac{1}{4})^1} = 48(\frac{1}{(-4)^n})$
b)
$S_n = a_1\frac{k^n - 1}{k-1} =$
$S_n = 12\frac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{1}{4}-1} = 12\frac{\frac{1}{4^n}-1}{-\frac{3}{4}} = -16(\frac{1}{4^n} - 1) = 16(1 - \frac{1}{4^n})$
eller
$S_n = -12\frac{(-\frac{1}{4})^n - 1}{-\frac{1}{4}-1} = -12\frac{\frac{1}{(-4)^n}-1}{-\frac{5}{4}} = \frac{48}{5}(\frac{1}{(-4)^n} - 1)$

c)
Rekken konvergerer fordi $|k| < 1$.
Konvergerer mot $S = \frac{a_1}{1-k} =$
$S = \frac{12}{1-\frac{1}{4}} = 16$ eller $S = \frac{-12}{1-(-\frac{1}{4})} = -\frac{48}{5} = -9.6$

IV

Den kjente norske vektløfter Bjørn Råsterk tok sikte på å få medalje i et mesterskap ved hjelp av kosttilskuddet Super TS (Super Testo Steron). Råsterk kjøpte tabletter av en østeuropeisk vektløfter som sa at Råsterk skulle ta 2 tabletter om dagen. Det viste seg at hver tablett inneholdt 5 mg av et stoff som sto på den internasjonale dopinglisten.
Hvert døgn ble 35% av dette stoffet brutt ned i kroppen til Råsterk.
En dopingkontroll vil gi positivt utslag på alle som har mer enn 25 mg av dette stoffet i kroppen.
a)
Risikerte Råsterk å bli tatt i dopingkontroll hvis han inntok 2 tabletter om dagen i lengre tid før et stevne?
b)
Hvor mange mg måtte hver tablett ha inneholdt for at Råsterk skulle hatt 20 mg av stoffet i kroppen etter lengre tids bruk?

a) BR inntok altså 10 mg om dagen.
I tabellform:

n :	1	2	3	4	$\dots$	n
	10	$10 \cdot 0.65$	$10 \cdot 0.65^2$	$10 \cdot 0.65^3$	$\dots$	$10 \cdot 0.65^{n-1}$
		10	$10 \cdot 0.65$	$10 \cdot 0.65^2$	$\dots$	$10 \cdot 0.65^{n-2}$
			10	$10 \cdot 0.65$	$\dots$	$10 \cdot 0.65^{n-3}$
					$\dots$	$\dots$
						10

Siste kolonne representerer akkumulert mengde stoff rett etter inntak av siste tablett, altså geometrisk rekke: $10 + 10 \cdot 0.65 + 10 \cdot 0.65^2 + \ldots 10 \cdot 0.65^{n-1}$, med med $a_1 = 10, k = 0.65$, som gir:

$$S_n = 10\frac{0.65^n - 1}{0.65 - 1} = \frac{10}{-0.35}(0.65^n - 1) \approx 28.6(1 - 0.65^n)$$

Når n blir stor går dette mot 28.6, da 0.65^n går mot 0, men vi bruker egentlig formelen

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-k} = \frac{10}{1-0.65} \approx 28.6 \text{ [mg]}$$

Altså risikerte Råsterk å bli tatt i dopingkontroller, hvis han har tatt to tabletter samme dag.

Hvis han ikke tok de to tablettene samme dag som konkurransen, ville det gått bra, da blir nivået:

$$28.6 \cdot 0.65 \approx 18.6 \text{ [mg]}...$$

Det ville faktisk også gått bra hvis han tok ***en*** tablett samme dag som konkurransen;

$$18.6 + 5 = 23.6 \text{ [mg]}$$

b)
Samme tabell og utregninger som i a), men med x istedenfor 10:

$S = \frac{a_1}{1-k}$ gir ligningen: $\frac{x}{1-0.65} = 20 \Leftrightarrow x = 20 \cdot 0.35 = 7.0$ [mg]

Hver tablett måtte altså ha inneholdt: $\frac{7}{2} = 3.5$ [mg]
(Forutsetter at nivået er 20 rett etter inntak av siste tablett, rett før inntak gir:
$\frac{x \cdot 0.65}{1-0.65} = 20 \Leftrightarrow x = 10.8$ [mg], altså 5.4 [mg] per tablett.)

V

Gitt rekken $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$
For hvilke verdier av x konvergerer denne rekken?
Vis at denne rekken har summen $S = \frac{x}{1-x}$ når den konvergerer.

Vi skal prøve å finne summen av rekken: $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$

Legg merke til at den siste rekken kan bli laget ved å derivere $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ m.h.p x, og deretter multiplisere med x.
Gjør det samme med uttrykket $S = \frac{x}{1-x}$ og bruk dette til å vise at
$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2}$

Derivasjon av S : $S'(x) = (\frac{x}{1-x})' = \frac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$
Multipliserer med x: $xS'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$
Vi har da gjort samme operasjon (derivasjon pluss multiplikasjon med x) på begge sider av

ligningen:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x}{1-x}$$

og har fått en ny ligning:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2} \quad QED$$

(**Til orientering**:

Vi kan også vise dette resultatet ved å skrive opp $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$ på denne spesielle måten i en tabell:

n	1	2	3	$\ldots$	$n-1$	n	Vannrett sum:
	x	x^2	x^3	$\ldots$	x^{n-1}	x^n	$\frac{x}{x-1}(x^n - 1) = \frac{1}{x-1}(x^{n+1} - x)$
		x^2	x^3	$\ldots.$	x^{n-1}	x^n	$\frac{x^2}{x-1}(x^{n-1} - 1) = \frac{1}{x-1}(x^{n+1} - x^2)$
			x^3	$\ldots$	x^{n-1}	x^n	$\frac{x^3}{x-1}(x^{n-2} - 1) = \frac{1}{x-1}(x^{n+1} - x^3)$
				...			...
					x^{n-1}	x^n	$\frac{x^{n-1}}{x-1}(x^2 - 1) = \frac{1}{x-1}(x^{n+1} - x^{n-1})$
						x^n	$\frac{x^n}{x-1}(x - 1) = \frac{1}{x-1}(x^{n+1} - x^n)$

Hver rad blir da en geometrisk rekke og kan summeres med formelen $a_1 \frac{k^n-1}{k-1}$.

Summerer vi alle disse vannrette summene, får vi:

$$n\frac{1}{x-1}x^{n+1} - \frac{1}{x-1}(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n) = n\frac{1}{x-1}x^{n+1} - \frac{1}{x-1}x\frac{x^n-1}{x-1}$$

Lar vi $n \to \infty$, går $n\frac{1}{x-1}x^{n+1}$ mot null (forutsatte konvergens: $|x| < 1$), og vi sitter igjen med:

$$-\frac{1}{x-1}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}\frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad)$$

VI

Tidligere har vi lært derivasjonsregelen $(x^n)' = nx^{n-1}$. Egentlig beviste vi den vel bare for $n = 2$.
Bruk induksjonsbevis til å bevise at denne formelen gjelder for alle positive heltall $n \in \mathbb{N}$, hvis vi antar at den gjelder for $n = 2$.
Tips: Du får bruk for produktregelen for derivasjon: $(uv)' = u'v + uv'$.

I $n = 1$:
Vi vet/forutsetter at $x' = 1$. (Stigningstallet til en rett linje $y = x$ er selvfølgelig 1...)
Formelen gir: $(x^1)' = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$ *OK*

II $n \to n + 1$:
Forutsetter at formel gjelder for akkurat n: $(x^n)' = nx^{n-1}$
Må vise at formelen da også gjelder for $n + 1$, dvs.
$(x^{n+1})' = (n+1)x^{n+1-1} = (n+1)x^n$

Benytter oss av at $x^{n+1} = x^n x$ og deriverer som produkt:

$(x^{n+1})' = (x^n x)' = nx^{n-1}x + x^n 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n$ *OK*