R2-Kapittel 2 - Algebra

21.11.08
Løsningsskisse

I

Gitt tallfølgen: $2, 6, 18, 54, \ldots$
a) Finn formelen for n'te ledd i tallfølgen.
b) Finn summen av 50 ledd i tallfølgen ved regning.

a) Geometrisk med $a_1 = 2$ og $k = 3$:
$a_n = a_1 k^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} = 2\frac{3^n}{3} = \frac{2}{3}3^n$

c) $S_{50} = a_1 \frac{k^{50}-1}{k-1} = 2\frac{3^{50}-1}{3-1} = 3^{50} - 1 \approx 7.18 \cdot 10^{23}$

II

Gitt tallfølgen: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
a) Finn formelen for n'te ledd i tallfølgen.
b) Finn summen av 50 ledd i tallfølgen ved hjelp av lommeregner.

a) Hverken aritmetisk eller geometrisk, men vi ser lett at $a_n = \frac{n}{n+1}$

b) sum(seq(X/(X+1),X,1,50) gir tilnærmet: 46.5

III

Vann renner ut av en vanntank.
Antall liter vann som renner ut i løpet av et sekund, danner en tilnærmet geometrisk rekke, der $a_1 = 4$ [l] og $k = 0.95$.
a) Hvor mye vann renner ut i løpet av de første 30 sekundene?
b) Hvor mye vann er det i tanken totalt?

a) $a_n = a_1 k^{n-1} = 4 \cdot 0.95^{n-1} \approx 4.21 \cdot 0.95^n$
$S_{30} = a_1 \frac{k^{30}-1}{k-1} = 4\frac{0.95^{30}-1}{0.95-1} \approx 63$ [l]

b) Når det slutter å renne må tanken være tom,så antall liter i tanken gitt av:
$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{4}{1-0.95} = 80$ [l]

IV

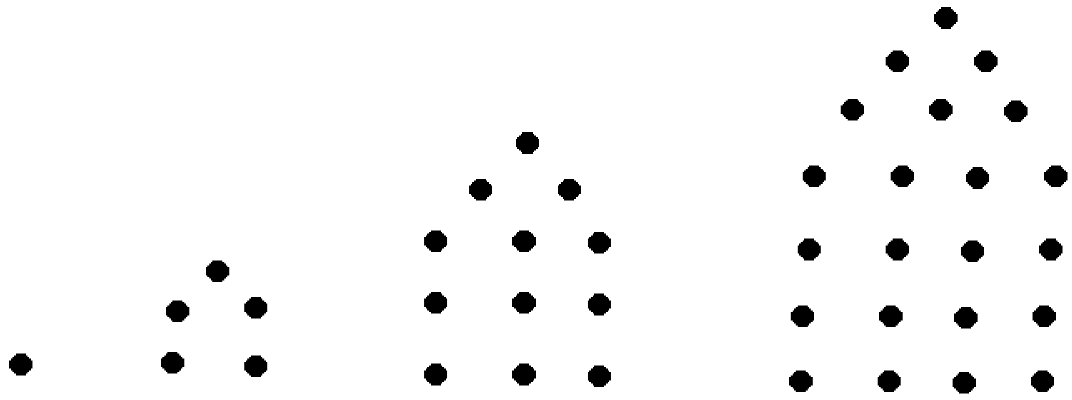
Hesteeier Luresen ga travhesten Strøket det prestasjonsfremmende medikamentet Sprottex. Produsentene av Sprottex (som foretrekker å være anonyme) anbefaler en daglig dose på 10 gram. For hvert gram inntatt Sprottex blir det lagret 3 milligram av et sporstoff S i blodet på hesten. 10% av sporstoffet i blodet brytes ned hvert døgn.Luresen brukte anbefalt dose i 30 dager før et travløp.
Hvor mye av sporstoffet S hadde Strøket i blodet på løpsdagen?
Strøket ble tatt i dopingkontrollen, da det viste seg at kontrollørene var i stand til å oppdage bruk av Sprottex, hvis hestene hadde mer enn 100 milligram sporstoff i blodet.
Hvilken daglig dose med Sprottex måtte Luresen ha brukt, hvis Strøket ikke skulle ha blitt tatt i kontrollen?

a)
Anbefalt dose (10 gram Sprottex) gir 10 $\cdot$ 3mg= 30mg sporstoff S.
Oppsamlet mengde S: $30 \cdot 0.9^{30} + 30 \cdot 0.9^{29} + \ldots + 30 \cdot 0.9^{2} + 30 \cdot 0.9^{1}$
Altså geometrisk rekke med $a_1 = 30 \cdot 0.9 = 27$,$k = 0.9$ og $n = 30$
Summen blir: $a_1 \frac{k^n-1}{k-1} = 27 \frac{0.9^{30}-1}{0.9-1} = 259$ [mg]

b)
Med daglig dose d[g] Sprottex får vi tilsvarende:
Sporstoff: $s = d \cdot 3$[mg]
$3d \cdot 0.9^{30} + 3d \cdot 0.9^{29} + \ldots + 3d \cdot 0.9^{2} + 3d \cdot 0.9^{1}$
Altså geometrisk rekke med $b_1 = 3d \cdot 0.9 = 2.7d, k = 0.9$ og $n = 30$
Summen blir: $a_1 \frac{k^n-1}{k-1} = 100 \Leftrightarrow 2.7d \frac{0.9^{30}-1}{0.9-1} = 100$
Og daglig dose Sprottex blir: $d = \frac{100(0.9-1)}{2.7(0.9^{30}-1)} = 3.87$[g]

V

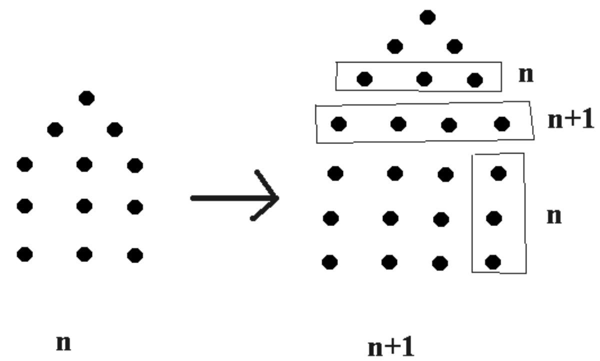
"Hustallene" danner en tallfølge $h_1, h_2, h_3, \ldots$
Figuren illustrerer de fire første leddene i "hustall"-følgen:



a) Skriv opp de fem første tallene i tallfølgen.
b) Bruk figuren til å begrunne sammenhengen: $a_{n+1} = a_n + 3n + 1$
c) Bruk figuren til å begrunne formelen: $a_n = \frac{3n^2-n}{2}$
d) Forklar hvordan du ville bruke lommeregneren og kvadreg til å finne:$a_n = \frac{3n^2-n}{2}$
e) Lat som om du klarte spørsmål b), men ikke spørsmål c) og d), og vis at formelen $a_n = \frac{3n^2-n}{2}$ gjelder ved hjelp av induksjonsbeviset.

a) Figurer gir følgen h_n : $1, 5, 12, 22, 35$

b) Flere måter å gjøre dette på...



Vi ser at differansen blir: $a_{n+1} - a_n = n + (n+1) + n = 3n + 1$
Eller: $a_{n+1} = a_n + 3n + 1$

c) "Huset" er sammensatt av et kvadrat med n^2 punkter,
pluss en trekant (trekanttallene) som er summen av de naturlige tallene fra 1 til $n-1$,
altså: $S_n = \frac{n-1}{2}(1 + (n-1)) = \frac{n(n-1)}{2}$

Totalt: $a_n = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n^2+n^2-n}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$

d) {1,2,3,4,5} STO→ L1
{1,5,12,22,35} STO→ L2
QuadReg L1, L2 gir da:
y=ax^2+bx+c
a=1.5
b=-.5
c=0
Altså $a_n = 1.5n^2 - 0.5n =$

e) Skal vise at $a_n = \frac{3n^2-n}{2}$

Trinn 1: $n = 1$:

VS : $a_1 = 1$

HS : $\frac{3 \cdot 1^2-1}{2} = 1$ OK!

Trinn 2: $n \to n+1$:

Antar at vi vet formelen gjelder for *n*.

Hvis den skal gjelde for $n+1$, må $a_{n+1} = \frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{3n^2+6n+3-n-1}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2}$

Vi bruker b:

$a_{n+1} = a_n + 3n + 1 = \frac{3n^2-n}{2} + 3n + 1 = \frac{3n^2-n+2(3n+1)}{2} = \frac{3n^2-n+6n+2}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2}$ OK!

Formler og tips:

Aritmetiske følger og rekker: **n'te ledd:** $a_n = a_1 + d(n-1)$

Summen av n ledd: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Aritmetiske følger er lineære funksjoner av *n*, og summen av aritmetiske følger er kvadratiske funksjoner av *n*.

Geometriske følger og rekker: **n'te ledd:** $a_n = a_1 k$

Summen av n ledd: $S_n = a_1 \frac{k^n-1}{k-1}$

$Lim_{n\to\infty}(S_n)$ $S = \frac{a_1}{1-k}$, **når** $- < k < 1$

Geometriske følger er eksponentialfunksjoner av *n*, og summer av geometriske følger er eksponentialfunksjoner av *n* pluss et konstantledd.

Induksjonsbevis: I **Vis at påstand er sann for** $n = 1$

II **Vis at hvis utsagnet er sant for *n*, så er det også sant for** $n+1$

I eksplisitte formler er a_n en funksjon av leddnummeret *n*, eksempelvis:

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} = \frac{3}{2} 2^n$ (Heltallsfunksjon.)

I rekursive formler er a_n uttrykt som en funksjon av *n* og ledd som kommer foran,eksempelvis:

$\left\{ \begin{matrix} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2 \end{matrix} \right\}$, eventuelt: $\left\{ \begin{matrix} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 2 \end{matrix} \right\}$