R2 - 22.11.12

Løsningsskisser

Generelle kommentarer:
- Vær nøye med å svare på *alle* spørsmål!
  (Fort gjort å glemme delspørsmål i I...)
- Bruk *alltid* tabeller, i hvert fall på kladd, i spare- og låneoppgaver. (II og III)
- Algebra (1T, R1) viktig i forenklinger og utregninger. (I, IV, V)
- *Aldri* multiplisere eller dividere med noe som inneholder den ukjente i ulikheter!
  (Mister eller får falske løsninger!)

I

Gitt følgende tallfølger:
a) $-2, 1, 4, 7, \ldots$

b) $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots$

c) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots$

Finn den eksplisitte formelen, a_n, for n'te ledd i a), b) og c).

Finn den eksplisitte formelen, S_n, for summen av n ledd i a) og b).

Finn summen av 200 ledd i a) og b).

Forklar hvordan du kan finne summen av 200 ledd av følgen
i c) ved hjelp av lommeregner eller datamaskin.

a) $-2, 1, 4, 7, \ldots$

Aritmetisk følge: $a_1 = -2, \qquad d = 3$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = -2 + 3(n-1) = 3n - 5$$

$$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} = (-2 + 3n - 5)\frac{n}{2} = (3n - 7)\frac{n}{2} = \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{2}n$$

$$S_{200} = (3 \cdot 200 - 7)\frac{200}{2} = 59\,300$$

b) $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots$

Geometrisk følge: $a_1 = 2, \qquad k = \frac{2}{3}$

$$a_n = a_1 k^{n-1} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$S_n = a_1 \frac{k^n-1}{k-1} = 2\frac{(\frac{2}{3})^n-1}{\frac{2}{3}-1} = 2\frac{(\frac{2}{3})^n-1}{-\frac{1}{3}} = -6((\tfrac{2}{3})^n - 1) = 6(1-(\tfrac{2}{3})^n)$$

$$S_{200} = 6(1-(\tfrac{2}{3})^{200}) \approx 6.00$$

c) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots$

Nevnere er trekanttallene:

$$a_n = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

S_{200} kan finnes med GeoGebra-kommandoene:

a=Følge[2/(n*(n+1)),n,1,200]
S200=Sum[a]

Eventuelt i en kommando: **S200=Sum[Følge[2/(n*(n+1)),n,1,200]]**

II

Per startet å spare i 2007, da han satte inn kr. 5000 i slutten av året.
Siden har han hvert år satt inn kr. 5000 i slutten av hvert år.
Per får 3% rente per. år.
Hvor mye penger vil han ha på sparekontoen i slutten av året 2018?

Viktig å lage tabell!
2007: $n = 1$
2008: $n = 2$
Altså er $n = år - 2006$, slik at år 2018 tilsvarer $n = 2018 - 2006 = 12$.
Summen av sluttverdiene i slutten av 2018 (=år 12), etter at siste beløp er betalt inn:

$$S_{12} = 5000 + 5000 \cdot 1.03^1 + 5000 \cdot 1.03^2 + \ldots + +5000 \cdot 1.03^{11}$$

Geometrisk rekke, slik at beløpet på konto i slutten av 2018 blir:

$$S_{12} = a_1 \frac{k^{12}-1}{k-1} = 5000\frac{1.03^{12}-1}{1.03-1} = 70960 \text{ [kr]}$$

III

Kari har lånt kr. 500 000 i banken og skal betale lånet tilbake med faste beløp i slutten av hvert år i de påfølgende 25 år.
Hva blir det årlige tilbakebetalingsbeløpet hvis banken beregner seg en rente på 5%?

Igjen, lag tabell!
Nåverdiene av årlige tilbakebetalinger (X):

$$N_{25} = \frac{X}{1.05} + \frac{X}{1.05^2} + \ldots + \frac{X}{1.05^{25}}$$

Geometrisk rekke slik at $N_{25} = \frac{X}{1.05}\frac{(\frac{1}{1.05})^{25}-1}{\frac{1}{1.05}-1} = 14.094X$

Nåverdiene skal være lik lånebeløp:

$$N_{25} = 500000 \Leftrightarrow 14.094X = 500000 \Leftrightarrow$$

$$X = \frac{500000}{14.094} = 35476 \text{ [kr]}$$

IV

Vi har den geometriske rekken $x + \frac{x^2}{x-2} + \frac{x^3}{(x-2)^2} + \ldots$

a) For hvilke verdier av x konvergerer rekken?

b) Regn ut summen av rekken.

a)
Konvergens når $k = \frac{x}{x-2}$ oppfyller: $-1 < k < 1 \Leftrightarrow |k| < 1 \Leftrightarrow k^2 < 1$

$\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(x-2)^2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-(x-2)^2}{(x-2)^2} < 0 \Leftrightarrow$
$\frac{4x-4}{(x-2)^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{(x-2)^2} < 0$

Tall-linjer gir løsningsmengde $L = \langle \leftarrow, 1 \rangle$ eller $x < 1$.

b)
$S_\infty = \frac{a_1}{1-k} = \frac{x}{1-\frac{x}{x-2}} = \frac{x(x-2)}{x-2-x} = \frac{x(x-2)}{-2} = \frac{x(2-x)}{2}, \qquad x < 1$

V

I tabellen nedenfor har vi skrevet opp de første oddetallene slik at antall oddetall som står på hver rad, stemmer med nummeret på raden.
I den andre raden står det derfor to oddetall og i den tredje raden tre oddetall osv.

Rad:	**Oddetall:**	**Summen av oddetall i raden:**
1	1	$1=1^3$
2	3 5	$8=2^3$
3	7 9 11	$27=3^3$
4	13 15 17 19	$64=4^3$
5	21 23 25 27 29	$125=5^3$
6	31 33 35 37 39 41	$216=6^3$
7	43 45 47 49 51 53 55	$343=7^3$

a) Fyll ut linjene 4, 5, 6 og 7 i tabellen.

Se over.

b) Antall oddetall til sammen i de n første radene kaller vi m.
Forklar hvorfor vi har at $m = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

Antall oddetall i hver rad øker med en for hver rad,
så tilsammen blir det $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ oddetall i n rader.

c) Vis at summen av de m første oddetallene blir
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1) = m^2$.

Aritmetisk rekke, så

$$S_m = (a_1 + a_m)\frac{m}{2} = (1 + 2m - 1)\frac{m}{2} = 2m\frac{m}{2} = m^2$$

d) Bruk det du nå har funnet til å vise at

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

VS: Summen av alle tallene i tredje kolonne.
HS: Summen alle tallene i andre kolonne, etter det vi har vist i b) og c).

Strengt tatt burde vi bevise at radsummene blir tredje potens av radnummeret, men jeg tror ikke oppgaveforfatterne mente at dette skulle gjøres på en eksamensdag, da dette blir litt arbeid, tar litt tid og ligger i kanten av pensum:

Første oddetall i hver rad: 1,3,7,13,21,...
Differansene er 2,4,6,...: $d_n = 2n$
Første oddetall i hver rad kan da finnes med:

$$o_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 1 + (2 + 2(n-1))\frac{n-1}{2} = n^2 - n + 1$$

Sum oddetall i rad n blir da:

$$\begin{aligned}
& o_n + (o_n + 2) + (o_n + 4)\ldots + (o_n + 2(n-1)) = \\
& o_n \cdot n + (0 + 2 + 4 + \ldots + 2(n-1)) = \\
& o_n \cdot n + (0 + 2(n-1))\frac{n}{2} = \\
& o_n \cdot n + n^2 - n = \\
& (n^2 - n + 1)n + n^2 - n = \\
& n^3 - n^2 + n + n^2 - n = \\
& n^3 \qquad QED
\end{aligned}$$