R2 - Algebra - 29.09.14

Løsningsskisser

Oppgave 1

Gitt 5 tallfølger:

1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$

2) $7,\ 49,\ 343,\ 2401,\ \ldots$

3) $-1,\ 3,\ 7,\ 11,\ \ldots$

4) $1,\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{16},\ \ldots$

5) $1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \ldots$

a) Skriv opp det eksplisitte uttrykket for n'te ledd, a_n, for følgene over.

b) Finn summen av 100 ledd, S_{100}, for følgen i 2).

c) Finn en rekursiv formel for tallfølgene i 5).

a)
1) $a_n = \frac{1}{n}$

2) Geometrisk: $a_n = a_1 k^{n-1} = 7 \cdot 7^{n-1} = 7^n$

3) Aritmetisk: $a_n = a_1 + d(n-1) = -1 + 4(n-1) = 4n - 5$

4) $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$ (Ulike tall i teller, kvadrattall i nevner.)

5) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Vi gjenkjenner trekanttallene.)

b) Geometrisk: $a_1 = 7, k = 7$

$S_n = a_1 \frac{k^n-1}{k-1} = 7\frac{7^n-1}{7-1} = \frac{7}{6}(7^n - 1)$

$S_{100} = \frac{7}{6}(7^{100} - 1) \approx 3.77 \cdot 10^{84}$

(Kontroll med GGB: **Sum(7 ^n,n,1,100) gir 37735... eller 3.77 $\mathbf{10^{84}}$**)

c) Differanser: $2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ altså $d_n = n + 1$

$\{a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + n + 1\}$

Oppgave 2

Vi har en aritmetisk tallfølge der $a_4 = 11$ og $a_9 = 36$.

a) Finn det eksplisitte uttrykket for n'te ledd i tallfølgen (a_n).

b) Finn summen, S_{100}, av 100 ledd i tallfølgen a_n.

c) Finn en generell formel for summen av n ledd, S_n i tallfølgen a_n.

d) Skriv opp hva du ville skrevet i GeoGebra CAS for å finne svarene på b) og c), forutsatt at formelen for n'te ledd allerede var definert og lagt inn i funksjonen $a(n)$.

a)
$a_9 = a_1 + d8$ og $a_4 = a_1 + d3 \Rightarrow a_9 - a_4 = 5d \Rightarrow d = \frac{a_9 - a_4}{5} = \frac{36-11}{5} = 5$
$a_1 = a_4 - 3d = 11 - 3 \cdot 5 = -4$
): $a_n = a_1 + d(n-1) = -4 + 5(n-1) = 5n - 9$

(Kontroll med GGB: **Følge[5 n-9, n,1,10]** gir {-4, 1, 6, *11*, 16 ,21 ,26 , *36*, 41})

b)
$S_{100} = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} = (-4 + (5n - 9))\frac{n}{2} = (-4 + (5 \cdot 100 - 9))\frac{100}{2} = 24\,350$

c)
$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} = (-4 + (5n - 9))\frac{n}{2} = (5n - 13)\frac{n}{2} = \frac{5}{2}n^2 - \frac{13}{2}n$

d)
Lagt inn: **a(n):=5 n-9**
Skriver inn: **S_100:=Sum(a(i), i, 1, 100)** **gir $\mathbf{S_{100}}$:=24350** **(b))**
S(n):=Sum(a(i), i, 1, n) **gir S(n):= $\frac{5}{2}\mathbf{n}^2 - \frac{13}{2}\mathbf{n}$** **(c))**

Oppgave 3

Tallfølgen $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots$ er definert av den eksplisitte formelen $a_n = \frac{n}{2^n}$.
Det kan vises at summen av n ledd kan skrives slik: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

a) Bevis at denne formelen er riktig med induksjonsbevis.

b) Hva blir summen av den uendelige rekken $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots$?

a)
$n = 1$: Følge: $S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$
Formel: $S_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ *OK*!

Induksjonstrinnet $t \to t+1$:

Forutsetter: $S_t = 2 - \frac{t+2}{2^t}$ Må vise: $S_{t+1} = 2 - \frac{(t+1)+2}{2^{T+1}} = 2 - \frac{t+3}{2^{t+1}}$

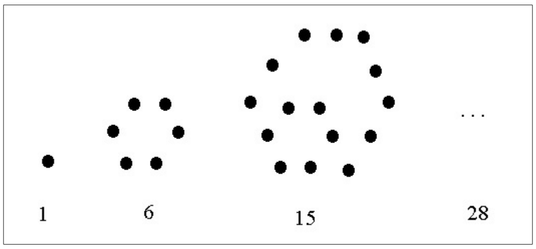
$S_{t+1} = S_t + a_{t+1} = 2 -= 2 - (\frac{t+2}{2^t} - \frac{t+1}{2^{t+1}}) = 2 - \frac{(t+2)2-(t+1)}{2^{t+1}} =$
$2 - \frac{2t+4-t-1}{2^{t+1}} = 2 - \frac{t+3}{2^{t+1}}$ *OK*!

b)
$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots = \lim_{n\to\infty}(2 - \frac{n+2}{2^n}) = 2$

(2^n i nevner vokser mye fortere enn $n+2$ i teller!)

Oppgave 4

Figuren under viser sekskanttallene s_n:



a) Skriv opp hva du tror s_5 og s_6 blir.

b) Finn de 5 første differansene $d_n = s_{n+1} - s_n$ og bruk det du ser til å finne den rekursive formelen for sekskanttallene s_n.

c) Bruk figuren til å begrunne hvorfor $s_n = 2T_n - 1 + (1 + 3 + \ldots + 2n - 3) = 2T_n - 1 + (n-1)^2$, der T_n er trekanttallene.

d) Bruk c) til å finne et eksplisitt uttrykk for sekskanttallet s_n.

e) Vi har formelen $s_n = s_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$. Finn et uttrykk for differansene d_n i b) og skriv opp hva du ville skrevet for å finne et generelt uttrykk for s_n i GeoGebra CAS.

a)
Ser på differanser: d_n: 5, 9, 13, ...
som igjen har differansen 4, så vi antar at fortsettelsen blir:

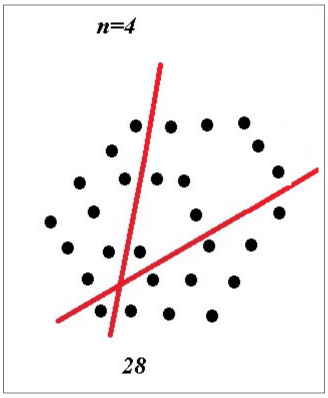
$$d_n: \quad 5, 9, 13, 17, 21, 25, \ldots$$

og får da sekskanttallene: $s_5 = s_4 + d_4 = 28 + 17 = 45$
og: $s_6 = s_5 + d_5 = 45 + 21 = 66$

b)
Differansene i a) gitt ved: $d_n = d_1 + d(n-1) = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$
Rekursiv formel blir da: $s_{n+1} = s_n + d_n = s_n + 4n + 1$
):

$$\{ s_1 = 1, \qquad s_{n+1} = s_n + 4n + 1 \}$$

c)



Figuren viser at vi har delt opp i to sektorer med trekanttall, hvor første leddet, 1, er tatt med en gang for mye og må trekkes fra, og en sektor med summen av de $n-1$'te ulike tallene som vi bør vite er kvadrattallet $(n-1)^2$.

d)
$s_n = 2T_n - 1 + (n-1)^2 = 2\frac{n(n+1)}{2} - 1 + n^2 - 2n + 1 = 2n^2 - n = n(2n-1)$

e)
Se b): $d_n = 4n + 1$

Vi skriver: **d(n):=4 n+1**
S(n):=1+Sum(d(i), i, 1, n-1) gir 2n²-n

(Skulle vi regne det ut manuelt, ville vi gjøre slik:
$s_n = 1 + (d_1 + d_{n-1})\frac{n-1}{2} =$ (Formel summen av aritmetisk følge.)
$1 + (5 + (4(n-1) + 1)\frac{n-1}{2} = 1 + (4n+2)\frac{n-1}{2} = 1 + (2n+1)(n-1) =$
$1 + 2n^2 - n - 1 = 2n^2 - n = n(2n-1)$
Som er det samme svaret vi fikk i d)!)

Oppgave 5

Du skal tilbakebetale et lån på 1.500.000,- til banken, med faste beløp i slutten av hvert år i $n = 25$ år. Banken bruker årlig rente $r = 3.5\%$.
Hva blir det årlige beløpet?

Tabellarisk:

Nåverdi:	n: **1**	**2**	**3**	**...**	**25**
$\frac{x}{1.035}$	x				
$\frac{x}{1.035^2}$		x			
$\frac{x}{1.035^3}$			x		
$\ldots$				$\ldots$	
$\frac{x}{1.035^{25}}$					x

Nåverdien av alle innbetalingene er summen av geometrisk rekke:
$a_1 = \frac{x}{1.035}, \quad k = \frac{1}{1.035}, \quad n = 25$
Så vi har nåverdien: $\frac{x}{1.035}\frac{(\frac{1}{1.035})^{25}-1}{\frac{1}{1.035}-1} \approx 16.482x$
Nåverdien av alle innbetalingene skal være lik lånet, så vi får det årlige beløpet x:
$1500000 = 16.482x \Leftrightarrow x = \frac{1500000}{16.482} \approx 91008$ [kr]

Oppgave 6

I den lille byen Renvik har familiene Rikerud og Grisk nettopp startet en kjemisk fabrikk, Splux AS, som produserer innsektmidlet KillAll. All produksjon eksporteres til fattige utviklingsland, da innsektmidlet har visse bivirkninger også for mennesker. Splux AS vil hver dag slippe ut $u = 4$ kg gift i den tilliggende idylliske innsjøen Renviksvannet, da de ikke er interessert i unødige utgifter på sikker destruering av produksjonsavfall.
Volumet av Renviksvannet er $V = 2000000$ m^3 og gjennomstrømmingen er hvert døgn $s = 4000$ m^3/døgn.
Vi skal lage en modell for giftmengden g_n i sjøen i starten av døgnet, hvert døgn etter at utslippene startet:
Hvis vi regner som om giften blir sluppet ut i starten av hvert døgn og at det

resten av døgnet renner ut $\frac{g_n}{V}s$ kg gift (konsentrasjon•gjennomstrømming),
får vi den rekursive formelen $g_{n+1} = g_n + u - \frac{s}{V}g_n$, eller omformet:

$$\{\ g_1 = u, \qquad g_{n+1} = (1 - \tfrac{s}{V})g_n + u\ \}$$

a) Finn mengden gift i Renviksvannet de første fem dagene etter utslippet.

b) Sett opp en tabell, omtrent som sparing med faste beløp, og vis at g_n har det eksplisitte uttrykket $g_n = 2000(1 - 0.998^n)$.

c) Hva vil giftmengden i Renviksvannet stabilisere seg på i det lange løp?

a)
Rekursjonsformelen blir med oppgitte tall:

$$\{\, g_1 = 4, \qquad g_{n+1} = (1 - \tfrac{4000}{2000000})g_n + 4\,\} \iff$$

$$\{\ g_1 = 4, \qquad g_{n+1} = 0.998g_n + 4\,\}$$

Innsetting gir:

$$g_1 = 4$$
$$g_2 = 0.998 \cdot 4 + 4 = 7.992 \text{ [kg]}$$
$$g_3 = 0.998 \cdot 7.992 + 4 = 11.976 \text{ [kg]}$$
$$g_4 = 0.998 \cdot 11.976 + 4 = 15.952 \text{ [kg]}$$
$$g_5 = 0.998 \cdot 15.952 + 4 = 19.92 \text{ [kg]}$$

b)

n:	**1**	**2**	**3**	**...**	**n**
	4	$4 \cdot 0.998$	$4 \cdot 0.998^2$	$\ldots$	$4 \cdot 0.998^{n-1}$
		4	$4 \cdot 0.998$	$\ldots$	$4 \cdot 0.998^{n-2}$
			$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
					$4 \cdot 0.998$
					4

Summen av siste kolonne (n) er geometrisk med $g_1 = 4, k = 0.998$:

$$g_n = 4\frac{0.998^n - 1}{0.998 - 1} = \frac{4}{-0.002}(0.998^n - 1) = 2000(1 - 0.998^n) \qquad \textit{QED}$$

c)
I det lange løp: $\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} 2000(1 - 0.998^n) = 2000$ [kg]

(Eksempelvis vil 10 år gi: $2000(1 - 0.998^{(10\cdot 365)}) = 1998.7$)