R2 - Vektorer og rekker

30.10.09

Ny versjon: 04.11.09

Løsningsskisser

I

Middels nivå: Flertrinns typeoppgaver, krever en viss forståelse av hva formlene uttrykker.

To linjer er gitt ved:

$l: \quad [x,y,z] = [1,0,1] + t[2,1,3]$

$m: \quad [x,y,z] = [0,1,0] + t[1,2,3]$

a) Hva er avstanden mellom disse to linjene?

b) Hva er avstanden fra punktet $P = (5,4,5)$ til linjen l ?

a)

Retningsvektorer: $\vec{r_l} = [2,1,3], \quad \vec{r_m} = [1,2,3]$

Normalvektor til linjene: $\vec{r_l} \times \vec{r_m} = [2,1,3] \times [1,2,3] = [-3,-3,3] = -3[1,1,-1]$

Velger $\vec{n} = [1,1,-1]$

$t = 0$ gir to punkt på linjene:

$P_l = (1,0,1)$ og $P_m = (0,1,0)$

$\overrightarrow{P_lP_m} = [-1,1,-1]$

Avstand som projeksjon av $\overrightarrow{P_lP_m}$ på $\vec{n}$:

$$a_{lm} = \left| \frac{\overrightarrow{P_lP_m} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[-1,1,-1]\cdot[1,1,-1]}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$$

b)

Avstand som høyde i et parallellogram:

$$a_{Pl} = \frac{\left|\overrightarrow{P_lP} \times \vec{r_l}\right|}{|\vec{r_l}|} = \frac{|[4,4,4]\times[2,1,3]|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}|[8,-4,-4]| =$$

$$\frac{4}{\sqrt{14}}|[2,-1,-1]| = \frac{4}{\sqrt{14}}\sqrt{2^2+1^2+1^2} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{14}} =$$

$$4\sqrt{\frac{6}{14}} = 4\sqrt{\frac{3}{7}} = 2.62$$

II

a), b), d): Middels nivå: Typeoppgaver, men krever en viss forståelse og litt tenkning.

c) Høyt nivå: Krever litt problemløsningsevner og forståelse/oversikt. Litt kronglete regning.

En kuleflate har ligningen $x^2 + 2x + y^2 + z^2 - 6z - 6 = 0$.

a) Hva er sentrum og radius til kuleflaten?

b) Hvilken avstand er det fra kule*flaten* til punktet $P = (3,4,7)$?

To plan har begge normalvektoren $\vec{n} = [1,1,2]$ og tangerer kuleflaten.

c) Hva er ligningen for disse planene?

d) Hva er avstanden fra P til disse planene?

a) Lager fulle kvadrater:

$$(x^2 + 2x + 1^2) + y^2 + (z^2 - 6z + 3^2) - 6 = 1^2 + 3^2 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4^2$$

): Sentrum: $S = (-1,0,3)$ Radius: $R = 4$

b) Figur viser at avstanden blir:

$a = \left|\overrightarrow{SP}\right| - R = |[4,4,4]| - 4 = 4|[1,1,1]| - 4 = 4\sqrt{1^2+1^2+1^2} - 4 =$
$4\sqrt{3} - 4 = 4(\sqrt{3} - 1) \approx 2.93$

c) Bruker tangeringspunktene T_1 og T_2 som punkt i planene:

$\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{ST_1} = \overrightarrow{OS} + R\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} =$ ($\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$ er enhetsvektor langs $\vec{n}$.)
$[-1,0,3] + 4\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}[1,1,2] = [-1,0,3] + \frac{4}{\sqrt{6}}[1,1,2] =$
$[\frac{4}{\sqrt{6}} - 1, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{8}{\sqrt{6}} + 3]$

Tilsvarende:
$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{ST_2} = [-1,0,3] - \frac{4}{\sqrt{6}}[1,1,2] = [-1 - \frac{4}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}, 3 - \frac{8}{\sqrt{6}}]$

): $T_1 = (\frac{4}{\sqrt{6}} - 1, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{8}{\sqrt{6}} + 3)$, $T_2 = (-1 - \frac{4}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}, 3 - \frac{8}{\sqrt{6}})$

Eller:
$T_1 = (0.633, 1.63, 6.27)$, $T_2 = (-2.63, -1.63, -0.266)$

Bruk 3 siffer (4 i mellomregninger) og konsekvent avrunding, hvis dere ikke regner eksakt!

Plan 1: $\vec{n} \cdot T_1P = 0 \Leftrightarrow [1,1,2] \cdot [x - (\frac{4}{\sqrt{6}} - 1), y - \frac{4}{\sqrt{6}}, z - (\frac{8}{\sqrt{6}} + 3)] = 0 \Leftrightarrow$
$x - \frac{4}{\sqrt{6}} + 1 + y - \frac{4}{\sqrt{6}} + 2z - 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{6}} - 2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow$
$x + y + 2z - 4\sqrt{6} - 5 = 0$

Eller: $x + y + 2z - 14.8 = 0$

Plan 2:
$\vec{n} \cdot T_2P = 0 \Leftrightarrow [1,1,2] \cdot [x - (-1 - \frac{4}{\sqrt{6}}), y - (-\frac{4}{\sqrt{6}}), z - (3 - \frac{8}{\sqrt{6}})] = 0 \Leftrightarrow$
$x + 1 + \frac{4}{\sqrt{6}} + y + \frac{4}{\sqrt{6}} + 2z - 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{6}} = 0 \Leftrightarrow$
$x + y + 2z + 4\sqrt{6} - 5 = 0$

Eller: $x + y + 2z + 4.80 = 0$

d) Avstandene er projeksjonene av $\overrightarrow{T_1P}$ og $\overrightarrow{T_1P}$ på $\vec{n}$:

$a_1 = \left|\frac{\overrightarrow{T_1P} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{[3-(\frac{4}{\sqrt{6}}-1), 4-\frac{4}{\sqrt{6}}, 7-(\frac{8}{\sqrt{6}}+3)] \cdot [1,1,2]}{\sqrt{6}}\right| = \frac{16-4\sqrt{6}}{\sqrt{6}} =$
$\frac{16\sqrt{6}-24}{6} = \frac{8\sqrt{6}-12}{3} \approx 2.53$

$a_2 = \left|\frac{\overrightarrow{T_2P} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{[3-(-1-\frac{4}{\sqrt{6}}), 4-(-\frac{4}{\sqrt{6}}), 7-(3-\frac{8}{\sqrt{6}})] \cdot [1,1,2]}{\sqrt{6}}\right| = \frac{4\sqrt{6}+16}{\sqrt{6}} = \frac{24+16\sqrt{6}}{6} =$
$\frac{12+8\sqrt{6}}{3} \approx 10.5$

III

a), b): Lavt nivå: Ren formelinnsetting.
c): Middels nivå: Krever litt undersøkelse og oppdagelse av et mønster og kjennskap til lommeregner.

Gitt tre tallfølger:

a_n : $4, 12, 36, 108, \ldots$
b_n : $2, 7, 12, 17, \ldots$
c_n : $\frac{3}{1}, \frac{4}{4}, \frac{5}{9}, \frac{6}{16}$

a) Finn formelen for n'te ledd i tallfølgen.
b) Finn summen av 50 ledd i tallfølgene a_n og b_n ved regning og c_n ved hjelp av lommeregner.
(**LIST,OPS,5:seq(** og **LIST,MATH, 5:sum(**)

a) og b)

a_n er geometrisk med kvotient $k = 3$:

$$a_n = a_1 k^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot \frac{3^n}{3^1} = \frac{4}{3} 3^n$$
$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k-1} = 4 \frac{3^n - 1}{3-1} = 2(3^n - 1) = 2 \cdot 3^n - 2$$

$$S_{50} = 2 \cdot 3^{50} - 2 \approx 1.44 \cdot 10^{24}$$

b_n er aritmetisk med differanse $d = 5$:

$$b_n = b_1 + d(n-1) = 2 + 5(n-1) = 5n - 3$$

$$S_n = \frac{n}{2}(b_1 + b_n) = \frac{n}{2}(2 + (5n-3)) = \frac{1}{2}n(5n-1) = \frac{5}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

$$S_{50} = \frac{5}{2} \cdot 50^2 - \frac{1}{2} \cdot 50 = 6225$$

c_n er hverken aritmetisk eller geometrisk, men ved hjelp av en tabell bør vi se svaret:

n :	1	2	3	4
c_n :	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{16}$

Vi ser: Teller to høyere enn indeks, nevner kvadrat av indeks.

): $c_n = \frac{n+2}{n^2}$

S_{50} =sum(seq(Y1,X,1,50)) der Y1=(X+2)/X ^2
≈ 7.75

V

a), b), d): Lavt nivå, som oppgave III.
c), e): Høyt nivå: Krever forståelse og visse algebraiske ferdigheter.

Vi skal studere en tallfølge: a_n : $3, 8, 15, 24, 35, \ldots$
a) Finn de fire første differansene i differansefølgen d_n.
b) Finn en formel for n –te ledd i differansefølgen d_n.
c) Forklar hvorfor vi har den rekursive sammenhengen:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 3 \end{array} \right\} \quad \text{eller} \quad \left\{ \begin{array}{c} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2n + 1 \end{array} \right\}$$

d) Finn en formel for summen av n ledd i differansefølgen d_n.
Hvis vi skulle bruke rekursjon for å komme frem til n –te ledd, ville vi få utviklingen:

$a_2 = a_1 + d_1$

$$a_3 = a_2 + d_2 = (a_1 + d_1) + d_2 = a_1 + d_1 + d_2$$
$$a_4 = a_3 + d_3 = (a_1 + d_1 + d_2) + d_3 = a_1 + d_1 + d_2 + d_3$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1}$$

Vi har en generell regel: $a_n = a_1 + \sum_1^{n-1} d_i$

Eller: n –te ledd i en tallfølge er første ledd pluss summen av $n-1$ ledd i differansefølgen!

e) Bruk dette til å finne et eksplisitt uttrykk for a_n.

a) Differanser: d_n : $5, 7, 9, 11, \ldots$

b) Aritmetisk med differanse $d = 2$:

$$d_n = d_1 + d(n-1) = 5 + 2(n-1) = 2n + 3$$

c) Fordi $a_2 = a_1 + d_1$, $a_3 = a_2 + d_2$ osv., har vi at:

$$a_{n+1} = a_n + d_n = a_n + (2n+3) \qquad \text{eller}$$

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1} = a_{n-1} + (2(n-1)+3) = a_{n-1} + 2n + 1$$

d) d_n er aritmetisk og vi har $S_n = \frac{n}{2}(d_1 + d_n) = \frac{n}{2}(5 + (2n+3)) = n^2 + 4n$

e) $a_n = a_1 + S_{n-1} = 3 + (n-1)^2 + 4(n-1) = n^2 + 2n$

V

Middels/Høyt nivå: Typeoppgave, men krever forståelse og litt nøyaktighet og systematikk.

Hesteeier Luresen ga travhesten Strøket det prestasjonsfremmende medikamentet Sprottex. Produsentene av Sprottex (som foretrekker å være anonyme) anbefaler en daglig dose på 10 gram. For hvert gram inntatt Sprottex blir det lagret 3 milligram av et sporstoff S i blodet på hesten. 10% av sporstoffet i blodet brytes ned hvert døgn.Luresen brukte anbefalt dose i 30 dager før et travløp.

Hvor mye av sporstoffet S hadde Strøket i blodet på løpsdagen?

Strøket ble tatt i dopingkontrollen, da det viste seg at kontrollørene var i stand til å oppdage bruk av Sprottex, hvis hestene hadde mer enn 100 milligram sporstoff i blodet.

Hvilken daglig dose med Sprottex måtte Luresen ha brukt, hvis Strøket ikke skulle ha blitt tatt i kontrollenen?

(***Tips***: Tilsvarer sparing med faste beløp, bruk tabell! Tenk at du setter inn 3 mg sporstoff på en "konto" med jevne mellomrom.)

a)
Viktig å etablere forholdstallet mellom sporstoff og dose:
$\frac{D}{S} = \frac{1[\mathrm{g}]}{3\ [\mathrm{mg}]} = \frac{1}{0.003} \Leftrightarrow S = 0.003D$

Anbefalt dose: $D = 10$ g gir da $S = 0.003 \cdot D = 0.03$ [g]

Hvis oppgaver som dette er litt uklare i tidsangivelsene, så vær nøye med å skrive hvilke antagelser du gjør:

Antar at dosen gies om morgenen og at det går et døgn fra siste dose til løpet går.

(Luresen er lur nok til å skjønne at det er uklokt å gi en dose rett før løpet...)
(Uansett så står det "...***før*** et travløp.", så den 30te dosen skjer uansett dagen før travløpet, men det har en viss innvirkning på resultatet om dosen settes om morgenen eller kvelden.)

En passende tabell gir oppsamlet mengde:
$S = 0.03 \cdot 0.9^{30} + 0.03 \cdot 0.9^{29} + \ldots + 0.03 \cdot 0.9^{1}$
Geometrisk rekke med $k = 0.9$, $n = 30$, og $a_1 = 0.03 \cdot 0.9 = 0.027$:
$S = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = 0.027 \frac{0.9^{30} - 1}{0.9 - 1} \approx 0.259$ [g]= 259 [mg]

b)
Med daglig dose x [g] får Strøket $s = 0.003x$ [g] sporstoff daglig og oppsamlet mengde blir:
$S_b = 0.003x0.9^{30} + 0.003x \cdot 0.9^{29} + \ldots + 0.003x \cdot 0.9^{1} =$
$0.003x0.9 \frac{0.9^{30} - 1}{0.9 - 1} = 0.0259x$

Betingelse for ikke å bli tatt: $0.0259x \leq 0.1 \Leftrightarrow x \leq \frac{0.1}{0.0259} \Leftrightarrow x \leq 3.87$ [g]