# Løsningsskisser til oppgaver i Kapittel 6.4 - Integrerende faktor

## Teori:

Differensialligninger på formen $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ (lineære i $y$ av første orden) er ikke separable hvis ikke $f(x)$ og $g(x)$ er tallkonstanter.

Vi trenger derfor en ny løsningsmetode, som også bygger på multiplikasjonsregelen for derivasjon:

$$(y \cdot e^{F(x)})' = y'e^{F(x)} + ye^{F(x)}f(x), \qquad \text{der } F'(x) = f(x)$$

Vi innfører en ***integrende faktor*** $IF = e^{\int f(x)dx} = e^{F(x)}$ og multipliserer differensialligningen med denne:

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad \text{blir da:} \qquad y'e^{F(x)} + ye^{F(x)}f(x) = g(x)e^{F(x)}$$

Med multiplikasjonsregelen kan vi da gjøre om venstre side av differensialligningen slik at vi får:

$$(ye^{F(x)})' = g(x)e^{F(x)}$$

Som vi løser ved integrasjon: $\quad ye^{F(x)} = \int g(x)e^{F(x)}dx$

Løsningen blir da: $\quad y = e^{-F(x)} \int g(x)e^{F(x)}dx$

Se også oppgave 6.31 under løsningsskisssene til kapittel 6.1, 6.2 og 6.3.

Når vi regner ut $IF = e^{\int f(x)dx}$ dropper vi integrasjonskonstanter, vi bruker den enkleste vi kan, uten integrasjonskonstanter!

***OBS: Svært ofte kan vi ved å tenke på multiplikasjonsregelen se hva den integrerende faktoren blir direkte, uten å regne ut $e^{\int f(x)dx}$!***

## Oppgaver:

### 632

$(e^{-x}y)' = -e^{-x}y + e^{-x}y'$

Altså har vi: $e^{-x}y' - e^{-x}y = 6x \iff$

$$\begin{aligned}
&(e^{-x}y)' = 6x \iff \\
&e^{-x}y = \int 6x dx = 3x^2 + C \iff \\
&y = 3x^2e^x + Ce^x
\end{aligned}$$

## 633

$x^3y' + 5y' + 3x^2y = \cos x \iff (x^3+5)y' + 3x^2y = \cos x$

Her er det mulig å se at vi kan bruke multiplikasjonsregelen direkte:

$(y(x^3+5))' = \cos x \iff y(x^3+5) = \int \cos x dx = \sin x + C$

$y = \frac{\sin x}{x^3+5} + \frac{C}{x^3+5}$

Hvis man ikke ser slikt blir det litt mer arbeid:

Vi skriver om til: $y' + \frac{3x^2}{x^3+5}y = \frac{\cos x}{x^3+5}$

$IF = e^{\int \frac{3x^2}{x^3+5}dx} = e^{\ln(x^3+5)} = x^3+5$ (Med variabelskifte $u = x^3+5$.)

Den integrerende faktoren var altså der hele tiden!

## 635 d

$y' + \sin x \cdot y = 0$

Et poeng, hvis ligningen er separabel, så er den separable metoden enklere enn integrerende faktor:

$\int \frac{1}{y}dy = \int -\sin x dx \iff \ln y = \cos x + D \iff y = e^{\cos x + D} = e^{\cos x}e^D = Ce^{\cos x}$

(
Integrerende faktor blir mer omstendelig:

$IF = e^{\int \sin x dx} = e^{-\cos x}$

som gir:

$y'e^{-\cos x} + ye^{-\cos x}\sin x = 0 \iff (ye^{-\cos x})' = 0 \iff ye^{-\cos x} = C \iff$
$y = Ce^{\cos x}$
)

## 636

a) $y' - 4y = 9$

Også separabel: $\int \frac{1}{9+4y}dy = \int dx \iff \frac{1}{4}\ln(9+4y) = x + D \iff$
$\ln(9+4y) = 4x + E \iff 9+4y = e^{4x+E} \iff$
$4y = Fe^{4x} - 9 \iff y = Ce^{4x} - \frac{9}{4}$

Med integrerende faktor: $IF = e^{\int -4dx} = e^{-4x}$

$(ye^{-4x})' = 9e^{-4x} \iff ye^{-4x} = 9\frac{1}{-4}e^{-4x} + C \iff y = Ce^{4x} - \frac{9}{4}$

$y(0) = 2$ gir: $2 = Ce^0 - \frac{9}{4} \iff C = \frac{17}{4}$ og $y = \frac{1}{4}(17e^{4x} - 9)$

c) $y' + \frac{1}{x}y = 7x, \qquad y(-1) = \frac{4}{3}$

Multipliserer vi opp $x$ får vi: $xy' + y = 7x^2$
Multiplikasjonsregel gir direkte: $(yx)' = 7x^2 \Leftrightarrow yx = \frac{7}{3}x^3 + C$
Og generell løsning: $y = \frac{7}{3}x^2 + \frac{C}{x}$

Initialbetingelse: $\frac{4}{3} = \frac{7}{3}1 + \frac{C}{-1} \Leftrightarrow C = 1$
Og spesiell løsning: $y = \frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{x}$

Med integrerende faktor: $IF = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$
Da vår vi ligningen: $xy' + y = 7x^2$
Som vi hadde fra starten av med riktig integrerende faktor!

## 637 c

$y' + \frac{1}{2x}y = 4x$

$IF = e^{\int \frac{1}{2x}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = e^{\ln\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

$(y\sqrt{x})' = 4x\sqrt{x} \Leftrightarrow$
$y\sqrt{x} = 4\int x\sqrt{x}\,dx = 4\int x^{\frac{3}{2}}dx = 4\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = 4\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{8}{5}(\sqrt{x})^5 + C$
$y = \frac{8}{5}(\sqrt{x})^4 + \frac{C}{\sqrt{x}} = \frac{8}{5}x^2 + \frac{C}{\sqrt{x}}$

## 638

c) $xy' + y = x^2\sin x$

Igjen, direkte: $(yx)' = x^2\sin x \Leftrightarrow yx = \int x^2\sin x dx$ og to runder med delvis integrasjon:

$I = \int x^2\sin x dx = -\cos x \cdot x^2 - \int(-\cos x)2x dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx$

$I_2 = \int x\cos x dx = x\sin x - \int\sin x dx = x\sin x + \cos x + D$

$I = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x + C$

$yx = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x + C$

$y = 2\sin x + \frac{2-x^2}{x}\cos x + \frac{C}{x}$

Med integrerende faktor blir det litt "frem og tilbake er like langt":

Først riktig lineær form: $y' + \frac{1}{x}y = x\sin x$

$IF = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

Og tilbake der vi var: $xy' + y = x^2\sin x$ ...

## 639

(Se også oppgave 6.31!)

a) Homogen ligning (Høyre side lik null): $y' + f(x)y = 0$

Separabel: $\int \frac{1}{y}dy = -\int f(x)dx \Leftrightarrow \ln y = -F(x) + C \Leftrightarrow y_H = Ce^{-F(x)}$ *QED*

b) $y = y_S + y_H$ gir innsatt:
$VS = y_S' + y_H' + f(x)(y_S + y_H) = y_S' + f(x)y_S + y_H' + f(x)y_H$
Da $y_H$ er løsning av homogen må $y_H' + f(x)y_H = 0$,
og da $y_S$ er løsning av $y' + f(x)y = g(x)$ må $y_S' + f(x)y_S = g(x)$
så vi får:
$VS = g(x)$
$HS = g(x)$, så $y = y_S + y_H$ er altså løsning.

(Poenget er at $y_S$ bidrar med høyreside $g(x)$, mens $y_H$ bidrar med 0, så tilsammen gir de $g(x)$.)

Metoden som brukes i denne oppgaven kan da beskrives slik:

- Finn $y_H$ som er løsning av homogen ligning.
  Separabel: $y_H = Ce^{-F(x)}$, der $F'(x) = f(x)$
- Finn $y_S$ ved å prøve med noe som kan gi høyre side, eksempelvis:

| **HS:** | $y_S$**:** |
|---|---|
| Polynom | $A + Bx + Cx^2$ opp til tilsvarende grad |
| $e^{kx}$ | $Ae^{kx}$ |
| $\sin kx$ eller $\cos kx$ | $A\sin kx + B\cos kx$ |

Konstantene $A, B, \ldots$ finner vi ved å sammenligne med høyre siden av ligningen.

c)
$y' + 2y = 2x + 5$

Homogen, separabel: $y_H = Ce^{-\int 2dx} = Ce^{-2x}$

Spesiell: $y = A + Bx$ gir innsatt:
$B + 2(A + Bx) = 2x + 5 \Leftrightarrow 2A + B + 2Bx = 2x + 5$
Altså er: $2B = 2 \Leftrightarrow B = 1$
$2A + B = 5 \Leftrightarrow A = \frac{5-B}{2} = 2$
$y_S = 2 + x$

$y = y_H + y_S = Ce^{-2x} + 2 + x$

(Akkurat i dette tilfellet sparer denne metoden oss for delvis integrasjon av:
$\int (2x + 5)e^{2x}dx$ )

d) 1)
$y' - 2y = e^{5x}$

Homogen, separabel: $y_H = Ce^{-\int -2dx} = Ce^{2x} = Ce^{2x}$

Spesiell: $y_S = Ae^{5x}$ gir innsatt:
$5Ae^{5x} - 2Ae^{5x} = e^{5x} \Leftrightarrow 5A - 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}$

$y_S = \frac{1}{3}e^{5x}$

$y = y_H + y_S = Ce^{2x} + \frac{1}{3}e^{5x}$

Med vanlig metode: $IF = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$

$(ye^{-2x})' = e^{5x}e^{-2x} \Leftrightarrow (ye^{-2x})' = e^{3x} \Leftrightarrow ye^{-2x} = \frac{1}{3}e^{3x} + C$

$y = \frac{1}{3}e^{5x} + Ce^{2x}$

d) 2)

$y' + \frac{1}{x}y = 3x$

Homogen: $y_H = Ce^{-\int \frac{1}{x}dx} = Ce^{-\ln x} = Cx^{-1} = \frac{C}{x}$

Spesiell: $y_S = A + Bx + Cx^2$ (Opp til $x^2$ da $xy' + y = 3x^2$.)

Innsatt: $B + 2Cx + \frac{A+Bx+Cx^2}{x} = 3x \Leftrightarrow B + 2Cx + \frac{A}{x} + B + Cx = 3x \Leftrightarrow$

Samler ledd: $2B + (2C + C)x + \frac{A}{x} = 3x$

Hvis dette skal stemme må: $A = 0$, $B = 0$ og $C = 1$

Altså $y_S = x^2$ og generell løsning: $y = y_H + y_S = \frac{C}{x} + x^2$

Med vanlig metode:

$xy' + y = 3x^2 \Leftrightarrow (yx)' = 3x^2 \Leftrightarrow yx = \int 3x^2dx = x^3 + C$

$y = x^2 + \frac{C}{x}$

Oppgavesamlingen er altså ikke så flink til å gi gode eksempler på når vi trenger mer avanserte metoder, mange lar seg løse som separable eller med multiplikasjonsregelen og blir faktisk mer tungvindte med integrerende faktor eller metoden i 639.

Bruk derfor ikke integrerende faktor hvis du kan separere ligningen eller bruke multiplikasjonsregelen direkte.

Enkle metoder og enkel regning gir færre feil enn mer kompliserte metoder og mer komplisert regning...