Oppgaver i kapittel 6.6 - Andre ordens differensialligninger

660

a) Karakteristisk ligning: $r^2 - 2r + 2 = 0$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm -\sqrt{4}\,\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$y = e^x(C\cos x + D\sin x)$

b) Karakteristisk ligning: $r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r = 3 \vee r = 2$

$y = Ce^{3x} + De^{2x}$

c) Karakteristisk ligning: $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$

$y = (Cx + D)e^x$

661

Andre ordens, lineær, homogen DL med konstante koeffisienter.
Karakteristisk ligning: $r^2 + 8r + 16 = 0 \Leftrightarrow (r+4)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 4$

Generell løsning: $y = (Cx + D)e^{-4x}$

Initialbetingelser: $y(0) = e, \quad y'(0) = e$

$y' = Ce^{-4x} + (Cx + D)(-4)e^{-4x} =$ (Multiplikasjonsregel)
$-4Cxe^{-4x} + (C - 4D)e^{-4x}$

$y(0) = e \Leftrightarrow D = e$

$y'(0) = e \Leftrightarrow C - 4D = e \Rightarrow C = e + 4D = 5e$

Spesiell løsning: $y = (5ex + e)e^{-4x} = (5x + 1)ee^{-4x} = (5x + 1)e^{1-4x}$

664

a) Positivt utslag mot høyre.

Kraft = masse • aksellerasjon

$-ky = m \cdot y'' \Leftrightarrow my'' + ky = 0$

Løsning:
Karakteristisk ligning: $mr^2 + k = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,i$

Altså på formen: $r = 0 \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\,i$

Generell løsning: $y = e^{0t}(C\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + D\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) =$
$C\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + D\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$

b) Med tall: $\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0.5}} = 2 \quad) : \qquad y = C\cos 2t + D\sin 2t$

Initialbetingelse: $y(0) = 0.06$ og $y'(0) = 0$
Husk den siste! Klossen er i ro helt til vi slipper den!

$0.06 = C \cdot 1 + D \cdot 0 \Leftrightarrow C = 0.06$

$y' = -2C\sin 2t + 2D\cos 2t$

$0 = -2C \cdot 0 + 2D \cdot 1 \Leftrightarrow D = 0$

Spesiell løsning: $y = 0.06\cos 2t$ [m], t i sekunder

c) Amplitude: $A = 0.06$

Svingetid gitt av: $\frac{2\pi}{T} = 2 \Leftrightarrow T = \pi \approx 3.1$

Generelt kan vi merke oss at vi har: $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

d) Samme fjær og kloss, vi bare slipper den fra et annet sted, så vi har nå:

$y = A\cos 2t$ og $y' = -2A\sin 2t$

Første gang vi passerer likevektslinjen ($y = 0$) er når $t = \frac{T}{4}$:

$-1.4 = -2A\sin 2\frac{3.1}{4} \Leftrightarrow A = 0.7$

Spesiell løsning: $y = 0.7\cos 2t$

Svingetiden blir den samme, amplituden blir 0.7[m].

666

a)

Likevektsstillingen er s_0 unna enden på fjæren i slakk stilling. (Se side 303!)

Der er kreftene i likevekt: $mg = ks_0 \Leftrightarrow mg - ks_0 = 0$

Når gjenstanden er $s(t)$ unna likevektsstillingen har vi Newtons andre lov:

Kraft = masse • aksellerasjon

$mg - k(s + s_0) - ls' = ms''$ da farten er s' og aksellerasjonen er s''.

$mg - ks - ks_0 - ls' = ms''$

$-ks - ls' = ms''$ da som før nevnt: $mg - ks_0 = 0$

$ms'' + ls' + ks = 0$

Karakteristisk ligning: $r^2 + 2r + 10 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm 3i$

Generell løsning: $s(t) = e^{-t}(C\cos 3t + D\sin 3t)$ [m], t i sekunder.

b) Initialbetingelser:
Startutslag: $s(0) = -1$ [m]
Startfart: $s'(0) = 4$ [m/s]

c) Dette gir: $-1 = e^0(C \cdot 1 + D \cdot 0) \Leftrightarrow C = -1$

$$s'(t) = -e^{-t}(C\cos 3t + D\sin 3t) + e^{-t}(-3C\sin 3t + 3D\cos 3t) = e^{-t}((3D - C)\cos 3t - (D + 3C)\sin 3t)$$

$$4 = 3D - C \Leftrightarrow D = \tfrac{4+C}{3} = \tfrac{4-1}{3} = 1$$

Spesiell løsning: $s(t) = e^{-t}(-\cos 3t + \sin 3t)$ [m], t i sekunder

d) $\sin 3t - \cos 3t = \sqrt{1^2 + 1^2}\,\sin(3t + \varphi)$, $\tan\varphi = -1$ og φ i 4de kvadrant

): $s(t) = e^{-t}\sqrt{2}\,\sin(3t - \tfrac{\pi}{4})$

e) Dette er en dempet harmonisk svingning, der $s(t)$ ligger innenfor $\pm\sqrt{2}\,e^{-t}$.