Differensialligninger, Eulers metode og følger og rekker

H-P Ulven, 01.04.09

Eulers metode for numerisk løsning av differensialligninger:

Førsteordens differensialligninger på formen

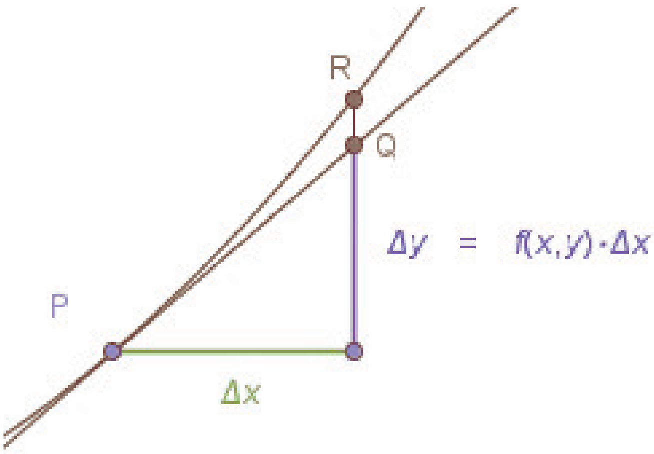
$$y' = f(x, y)$$

kan alltid brukes til å regne ut stigningstallet til tangenten for et hvilket som helst punkt som ligger på en løsningskurve.

Hvis vi starter i et punkt $P = (x_n, y_n)$ kan vi regne ut stigningstallet til tangenten i punktet P som

$$y' = f(x_n, y_n)$$

Da kan vi gå Δx mot høyre og Δy oppover langs tangenten til løsningskurven fra punktet P og komme til punktet Q som vi ser av figur 1:



Figur 1.

Her er $\Delta y = y'\Delta x = f(x_n, y_n)\Delta x$, slik at $Q = (x_{n+1}, y_{n+1})$ er gitt av:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta x \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta y = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x \end{aligned}$$

Hvis Δx ikke er altfor stor, og ikke kurven er alt for komplisert vil feilen QR ikke bli større enn at vi får en akseptabel tilnærmet løsningskurve ved å utføre følgende rekursjon:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Initialverdier: } x_0, y_0 \\ x_{n+1} = x_n + \Delta x \\ y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x\end{array}\right\}$$

Sammenheng med følger og rekker:

Hvis vi bruker $\Delta x = 1$, ser vi at Eulers metode er en helt vanlig rekursiv utvikling av en tallfølge:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Initialverdi: } n = 0, a_0 \\ n = n + 1 \\ a_{n+1} = a_n + f(n, a_n)\end{array}\right\}$$

La oss sammenligne resultatene for noen av de enkleste differensialligningene:

y' = a:

Løst som differensialligning: $y = \int a dx = ax + C = ax + y_0$

Løst som tallfølge: $a_{n+1} = a_n + a$

Altså en aritmetisk følge med differanse $d = a$ og vi får derfor:

$$a_n = a_1 + a(n-1) = a_0 + a + a(n-1) = an + a_0$$

Altså samme løsning i begge tilfeller, hvilket ikke er så rart da løsningskurven er en rett linje...

y' = ky:

Løst som differensialligning: $\int \frac{1}{y} dy = \int k dx \Leftrightarrow \ln|y| = kx + D \Leftrightarrow y = Ce^{kx} = y_0 e^{kx}$

Løst som tallfølge: $a_{n+1} = a_n + ka_n = (1+k)a_n$

Altså en geometrisk følge med kvotient: $(1+k)$ og vi får derfor:

$$a_n = a_1(1+k)^{n-1} = a_0(1+k)(1+k)^{n-1} = a_0(1+k)^n$$

Hvis vi omformer til grunntall e får vi: $a_n = a_0 e^{\ln(1+k)n}$ så resultatet blir rimelig likt hvis $\ln(1+k)$ er rimelig lik k.

Litt eksperimentering:

k :	$\ln(k+1)$
1	0.693
0.1	0.0953
0.05	0.0488
0.01	0.00995
0.005	0.00499
...	...
0	0
...	...
-0.005	.0.0501
-0.01	-0.01005
-0.05	-0.0513
-0.1	-0.105
...	...

Konklusjon:

Hvis $-0.05 < k < 0.05$, så er en diskret tallfølge en god tilnærming til den kontinuerlige løsningen av tilsvarende differensialligning.

Setter vi kravet $\ln(1+k) = k$ og utvikler dette videre får vi:

$$\frac{1}{k}\ln(1+k) = 1 \Leftrightarrow \ln(1+k)^{\frac{1}{k}} = 1 \Leftrightarrow (1+k)^{\frac{1}{k}} = e \Leftrightarrow (1+\frac{1}{m})^m,\ m = \frac{1}{k}$$

k må altså være så liten (eller $m = \frac{1}{k}$ må være så stor) at $(1+\frac{1}{m})^m$ blir en god tilnærming av e.

y'+ay=b:

Løst som separabel differensialligning:

$\int \frac{1}{b-ay} = \int dx \Leftrightarrow \frac{\ln|b-ay|}{-a} = x + D \Leftrightarrow \ln|b-ay| = -ax + E \Leftrightarrow$

$$b - ay = Fe^{-ax} \Leftrightarrow y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax} = \frac{b}{a} + (y_0 - \frac{b}{a})e^{-ax}$$

Løst som utvikling av tallfølge:

$$a_{n+1} = a_n + b - ay_n = (1-a)y_n + b$$

Dette tilsvarer å sette inn et beløp på konto og legge til rente og et nytt innskudd i hvert trinn, så vi setter opp en tabell:

$n = 0$	1	2	3	$\dots$	n
a_0	$a_0(1-a)$	$a_0(1-a)^2$	$a_0(1-a)^3$	...	$a_0(1-a)^n$
	b	$b(1-a)$	$b(1-a)^2$	...	$b(1-a)^{n-1}$
		b	$b(1-a)$	...	$\dots$
			b	...	$b(1-a)^2$
				...	$b(1-a)$
					b

Slik at vi får:

$$a_n = b + b(1-a) + b(1-a)^2 + \ldots + b(1-a)^{n-1} + a_0(1-a)^n =$$
$$b\frac{(1-a)^n - 1}{(1-a) - 1} + a_0(1-a)^n = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}(1-a)^n + a_0(1-a)^n = \frac{b}{a} + (a_0 - \frac{b}{a})(1-a)^n$$

Så igjen får vi samme svar som differensialligningen, hvis $\ln(1-a)$ er en god tilnærming av $-a$, da dette gir oss:

$$a_n = \frac{b}{a} + (a_0 - \frac{b}{a})e^{\ln(1-a)n} \approx \frac{b}{a} + (a_0 - \frac{b}{a})e^{-an}$$