Kapittel 6.5 - Praktiske eksempler på førsteordens differensialligninger

De vanligste praktiske eksemplene på anvendelser av førsteordens differensialligninger

Versjon: 17.02.17
Har lagt inn henvisninger til 2016-utgaven av læreboken.
Oppgaver er fra tidligere utgaver av læreboken.

Innhold:

- Oversikt over alle i tabell
- Oversikt med kommentarer og løsningsmetoder.
- Eksemplifsert med løsningsskisser fra oppgaver i *eldre utgave* av læreboken.

Oversikt:

Differensialligningene i tabellen blir løst og eksemplifisert i oppgaver senere i dette notatet.

Differensialligning:	Orden:	Løsning:	Praktiske eksempler:
$y' = ky$	1	$y = Ce^{kx}$	Populasjonsvekst. (Eks. 3 s. 284)
			(Ny bok: 6.65, 6.66)
$y' = -ky$	1	$y = Ce^{-kx}$	Radioaktiv nedbrytning. (Eks. 8 s. 295)
			(Ny bok: Eks. 26 s. 324. 6.70, 6.71)
			Oppgaver 649, 655
$h' = -k\sqrt{h}$	1	$h(t) = (C - \frac{k}{2}t)^2$	Toricelli: Tømming av tank.
			(Ny bok: 6.84, E75)
$T' = -k(T - T_{omg})$	1	$T = T_{omg} + Ce^{-kt}$	Temperaturfall i en kaffekopp. (642 s. 402)
			Oppgaver 683, 687
			(Ny bok: Eks. 20 s. 314, 6.59, E77, E78, E81)
$y' = u - \frac{g}{V}y$	1	$y = \frac{Vu}{g} - Ce^{-\frac{g}{V}t}$	Utslipp i fjellvann eller tank. (Eks. 4 s.284)
			Oppgaver 646, 657, X6.7, X6.8
			(Ny bok: Eks 23 s. 318, 6.63, 6.64, 6.85)
$mg - kv^2 = mv'$	1	$y = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{1-Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1+Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}$	Fritt fall med luftmotstand(Eks. 7 s. 291)
			Oppgaver 644, 645, 679, X6.2
			(Ny bok: Eks. 25 s. 322, 6.69, E74)
$y' = ky(N - y)$	1	$y = \frac{N}{1+Ce^{-kNt}}$	Populasjonsvekst med begrensning. (s. 288)
			Oppgaver 647, 652, 653
			(Ny bok: Eks. 24 s. 321, 6.67, 6.68, 6.87)
$y' = ky(B - t\,y)$	1	$y = \frac{B}{t-\frac{1}{kB}+Ce^{-kBt}}$	Utvikling av epidemi (Siste i eks. 4 s. 267)
$y'' + 3y' - 2y = x$	2	Se 6.6	Svingninger, andre ordens diff. ligning.

I Eksponentiell vekst som enkel populasjonsutvikling:

(*Eksempel side 284 og side 287*.) (Ny bok: Side 319.)

En populasjon har en endringshastighet (fødsler-døde)/tidsenhet som naturlig vil være proporsjonal med populasjonen.

Dette gir:

$$y' = ky \qquad \text{med løsning } y = Ce^{kx}, \qquad C = y(0)$$

Løsningsmetode:

Separabel: $\int \frac{1}{y}dy = k\int dx \Leftrightarrow \ln|y| = kx + D \Leftrightarrow y = Ce^{kx}$

(Eller integrerende faktor $e^{\int -kdx}$ på $y' - ky = 0$)

II Radioaktiv nedbrytning:

(*Eksempel 8 side 295.*) (Ny bok: Eks. 26 side 324.)

Tilsvarende vil massen av en radioaktivitet avta og ha en negativ endringshastighet proporsjonal med den massen som
er igjen:

$$y' = -ky \qquad \text{med løsning } y = Ce^{-kx}, \qquad C = y(0)$$

Løsningsmetode: Som I, se over.

III Eksponentiell vekst med bæreevne - Logistisk modell:

(*Eksempel 5 side 288.*) (Ny bok: Eks. 24 side 321.)

Istedenfor $y' = ky$ har vi her en maksimal bæreevne (B), det vil si et maks antall individer og det kan modelleres slik:

$$y' = ky(B-y) \qquad \text{med løsning } y = \frac{B}{1+Ce^{-kBt}} \text{ eller } y = 0 \text{ eller } y = B.$$

Vi ser av differensialligningen at veksten (y') blir liten hvis y nærmer seg B.
Dette medfører at y flater ut med $y = B$ som asymptote:

Når $t \to \infty$ vil $Ce^{-kBt} \to 0$ og vi ser at $y \to B$.

Dette kalles ***logistisk*** modell og logistisk vekst.

Løsningsmetode:
Separabel: $\int \frac{1}{y(B-y)}dy = k\int dt, \qquad y \neq 0, y \neq B$

Delbrøkoppspaltning: $\frac{1}{B}\int(\frac{1}{y} + \frac{1}{B-y})dy = k\int dt$

$$\frac{1}{B}\ln|y| - \ln|B-y| = kt + C_1$$
$$\ln|\frac{y}{B-y}| = Bkt + C_2$$
$$\frac{y}{B-y} = C_3e^{kBt}$$
$$y = BC_3e^{kBt} - yC_3e^{kBt}$$
$$y + yC_3e^{kBt} = BC_3e^{kBt}$$
$$y = \frac{BC_3e^{kBt}}{1+C_3e^{kBt}}$$
$$y = \frac{B}{\frac{1}{C_3e^{kBt}}+1}$$
$$y = \frac{B}{1+Ce^{-kBt}}$$

Dessuten: $y = 0$ eller $y = B$! (Se forutsetninger!)

Vi merker oss:

$y_\infty = B$ (Når $t \to \infty$)

$y(0) = \frac{B}{1+C}$ eller $C = \frac{B}{y(0)} - 1 = \frac{B-y(0)}{y(0)}$

Ligningen $y' = ky(B-y)$ forteller oss også at y' er maksimal når $y = \frac{B}{2}$.

(Se på $g(y) = -ky^2 + kBy$ og $g'(y) = -2ky + kB$

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{kB}{2k} = \frac{B}{2}!)$$

Kurven er ***symmetrisk*** om vendepunktet:

$$\frac{B}{2} = \frac{B}{1+Ce^{-kNt}} \Leftrightarrow 2 = 1 + Ce^{-kBt} \Leftrightarrow \frac{1}{C} = e^{-kBt} \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{1}{C} = \ln e^{-kBt} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{C}}{-kB} = \frac{\ln 1 - \ln C}{-kB} = \frac{\ln C}{kB}$$

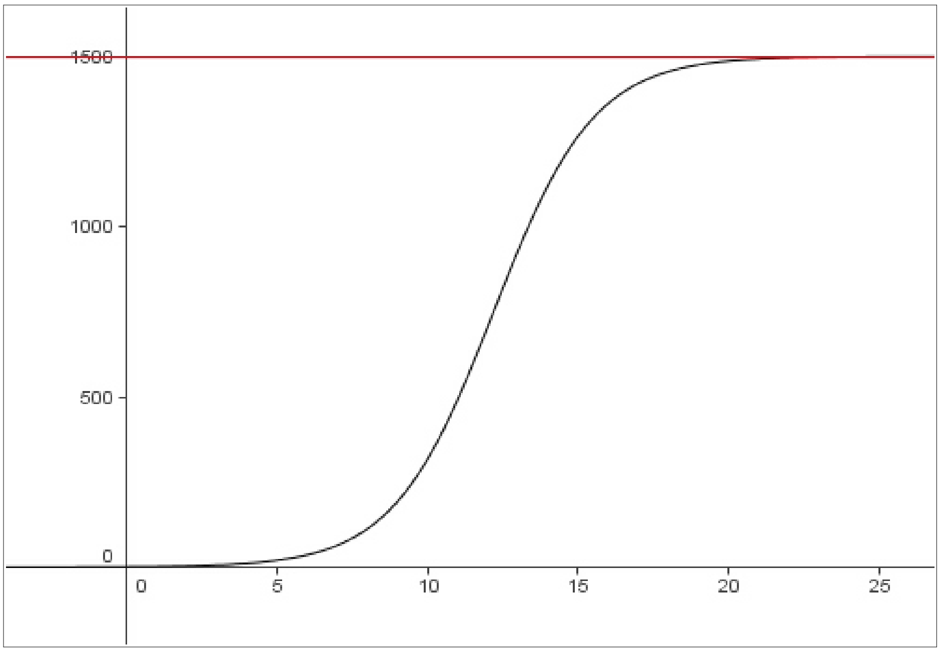
som gir vendepunktet:

$$VP = \left(\frac{\ln C}{kB}, \frac{B}{2}\right)$$

Og det ser slik ut: (oppgave *647*, se løsningsskisse senere)

$y = \frac{1500}{1+1499e^{-0.6t}}$, $y(0) = 1$, $y_\infty = B = 1500$, $C = \frac{1500-1}{1} = 1499$

$VP = \left(\frac{\ln 1499}{0.6}, 750\right) = (12.2, 750)$



IV Utvikling av epidemi:

(*Eksempel 4 side 267, tredje og siste del.*)

Slektninger av logistisk vekst er:

I $y' = ky(B-t)$ (Enkel variant)

og

II $y' = k\,y\,(B - t\,y)$ (Litt mer komplisert variant)

Poenget her er at endringen i antall smittede er proporsjonal med antall smittede, begrenset av antall individer i populasjonen, møter og smittesituasjoner (B) og at de fleste blir friske etterhvert som tiden går (t).
Grafen går derfor ned mot null igjen.

Løsningsmetode:

I er separabel og gir løsningen: $\int \frac{1}{y}dy = k\int(B-t)dt \Leftrightarrow \ln|y| = kBt - \frac{k}{2}t^2 + D \Leftrightarrow$

$y = Ce^{kBt-\frac{k}{2}t^2}$ eller med initialbetingelse: $y = y_0 e^{kBt-\frac{k}{2}t^2}$

Maksimal når $t = B$: $y_{\max} = y_0 e^{\frac{kB^2}{2}}$ (Derivasjon av $y(t)$)

II er litt verre:

$y' - kBy = kty^2$

Dette har vi ikke lært, men dette er en såkalt Bernoulli-ligning og illustrerer *variabelskifte*:
Vi fjerner de brysomme y-ene på høyre side og multipliserer med $-y^{-2}$:
$-y^{-2}y' + kBy^{-1} = kt, \qquad y \neq 0$
Så gjør vi et variabelskifte til $u = y^{-1}$, som har $u' = -y^{-2}y'$
Da kan vi skifte ut alle y-ene:
$u' + kBu = kt$
Og løser med integrerende faktor $IF = e^{\int kBdt} = e^{kBt}$

$$(ue^{kBt}) = \int e^{kBt}kt = \frac{e^{kBt}}{kB}kt - \frac{1}{B}\int e^{kBt} = \frac{e^{kBt}}{B}t - \frac{e^{kBt}}{kB^2} + D$$
$$u = \frac{t}{B} - \frac{1}{kB^2} + De^{-kBt}$$
$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{t}{B} - \frac{1}{kB^2} + De^{-kBt}} = \frac{B}{(t - \frac{1}{kB}) + Ce^{-kBt}}, \qquad \text{eller } y = 0 \text{ (Se forutsetning!)}$$

Ser vi på løsningen $y = \frac{B}{t - \frac{1}{kB} + Ce^{-kBt}}$
ser vi at $y \to 0$ når $t \to \infty$, da $Ce^{-kBt} \to 0$ og $\frac{B}{t-\frac{1}{kB}} \to 0$ når $t \to \infty$.

En digresjon:

Avsnittene V, VI og VII som følger, med *fritt fall, Newtons avkjølingslov og utslipp i vassdrag og vanntanker* styres alle av den *samme* differensialligningen:
$y' + ay = b, \qquad$ der a og b er konstanter.

Kan derfor være greit å studere denne litt mer inngående:

Separerer og løser:
$$\int \frac{y'}{b-ay}dx = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{b-ay}dy = \int dx \Leftrightarrow \frac{1}{-a}\ln|b-ay| = x + C_1$$
$$\ln|b-ay| = -ax + C_2 \Leftrightarrow |b-ay| = e^{-ax+C_2} \Leftrightarrow b - ay = C_3e^{-ax}$$

$$y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}, \qquad C = y(0) - \frac{b}{a}$$

Disse løsningene vil derfor alltid gå asymptotisk mot $y = \frac{b}{a}$ når x blir stor.
Fritt fall mot stabil hastighet, temperatur mot omgivelsestemperatur,
utslipp mot et stabilt nivå. ($\frac{b}{a}$)

V Fallskjermhopp og fritt fall med luftmotstand

(*Eksempel 7 side 291.*) (Ny bok: Eks. 25 side 322.)

Newtons andre lov sier:
kraft = masse • aksellerasjon,
og vi får derfor: Tyngde-luftmotstand=masse•aksellerasjon
Med akselerasjon som den deriverte av hastigheten får vi differensialligningen

$$mg - kv = mv'$$

hvis luftmotstanden er proporsjonal med hastigheten og

$$mg - kv^2 = mv'$$

hvis luftmotstanden er proporsjonal med kvadratet av hastigheten.

Den første er enklest å løse, da den er på formen $y' + ay = b$, som vi tidligere har vist har løsningen $y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$, som i dette tilfellet med
$v' + \frac{k}{m}v = g$
gir løsningen
$v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$, der $C = v(0) - \frac{mg}{k}$, og $v_\infty = \frac{mg}{k}$

Den andre er litt mer plundrete å løse, og vil antagelig ikke bli krevet løst på eksamen, men løsningen er uansett:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{1 - Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1 + Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}$$

Kan skrives: $v = v_\infty \frac{1-Ce^{-pt}}{1+Ce^{-pt}}$, der $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ og $C = \frac{v_\infty - v_0}{v_\infty + v_0}$

Vi legger merke til at den også kan skrives som
$v = \frac{2\sqrt{\frac{mg}{k}}}{1+Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}} - \sqrt{\frac{mg}{k}}$, altså som en logistisk modell flyttet en halv "bærekraft" nedover.

Løsningsmetode:

$mv' = mg - kv^2 \Leftrightarrow \frac{m}{k}v' = \frac{mg}{k} - v^2 \Leftrightarrow bv' = a^2 - v^2$
der vi har innført: $a^2 = \frac{mg}{k}$ og $b = \frac{m}{k}$ for å få en enklere form:
$bv' = a^2 - v^2$

Separabel: $b\int \frac{1}{a^2-v^2}dv = \int dt$

Delbrøkoppspaltning: $\frac{b}{2a}\int(\frac{1}{a-v} + \frac{1}{a+v})dv = \int dt$

$\int(\frac{1}{a-v} + \frac{1}{a+v})dv = \frac{2a}{b}\int dt$

$-\ln|a - v| + \ln|a + v| = \frac{2a}{b}t + C_1$

$\ln|\frac{a+v}{a-v}| = \frac{2a}{b}t + C_1$

$\frac{a+v}{a-v} = C_2e^{\frac{2a}{b}t}$

$a + v = aC_2e^{\frac{2a}{b}t} - vC_2e^{\frac{2a}{b}t}$

$v = a\frac{C_2e^{\frac{2a}{b}t}-1}{1+C_2e^{\frac{2a}{b}t}} = a\frac{1-Ce^{-\frac{2a}{b}t}}{Ce^{-\frac{2a}{b}t}+1}$ etter divisjon med $C_2e^{\frac{2a}{b}t}$

$v = a\frac{1-Ce^{-\frac{2a}{b}t}}{1+Ce^{-\frac{2a}{b}t}} = \sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{1+Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1-Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}$

Eller:

$v = v_\infty\frac{1+Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1-Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}$

der $C = \frac{v_\infty - v_0}{v_\infty + v_0}$ og $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ er grenseverdien når t går mot ∞.

VI Newtons avkjølingslov:

(*Oppgave 642 side 402.*)   (Ny bok: Eks. 20 side 314.)

Endringen i temperatur pr tidsenhet er ifølge Newton proporsjonal med temperaturforskjellen fra omgivelsene, og vi har derfor differensialligningen:

$$T' = -k(T - T_{omg})$$

Løsning:
Kan også skrives på formen $y' + ay = b$, $T' + kT = kT_{omg}$, som vi tidligere har vist har løsningen $y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$, slik at vi får løsningen:

$T = T_{omg} + Ce^{-kt}$, der $C = T(0) - T_{omg}$

Løsningsmetode:

$T' - kT = kT_{omg}$ og integrerende faktor,   eller separabel:

$\int \frac{1}{T - T_{omg}} dT = -k \int dt \Leftrightarrow \ln|T - T_{omg}| = -kt + C_1 \Leftrightarrow$

$T - T_{omg} = Ce^{-kt}$

$T = T_{omg} + Ce^{-kt}$ (Her er $C = T(0) - T_{omg}$)

VII Utslipp i tank eller innsjø:

(*Eksempel 4 side 284.*)   (Ny bok: Eks. 23 side 318.)

I den lille byen Renvik har familiene Rikerud og Grisk nettopp startet en kjemisk fabrikk, Splux AS, som produserer innsektmidlet KillAll. All produksjon eksporteres til fattige utviklingsland, da innsektmidlet har visse bivirkninger også for mennesker. Splux AS vil hvert år slippe ut 1200 kg gift i den tilliggende idylliske innsjøen Renviksvannet, da de ikke er interesserte i unødige utgifter på sikker destruering av produksjonsavfall.

Volumet av Renviksvannet er $V = 2000000 \text{ m}^3$, og gjennomstrømmingen er hvert døgn 5000 m^3.

Vi vil finne giftmengden i vannet som funksjon av tiden. (y)

Endring i giftmengde pr. tidsenhet Δt: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1200 \text{ kg}}{365 \text{ døgn}} - \frac{y \text{ kg}}{2000000 \text{ m}^3} \cdot \frac{5000\text{m}^3}{1\text{døgn}}$

Generelt, med utslipp $u = \frac{1200 \text{ kg}}{365 \text{ døgn}}$

og gjennomstrømming $g = \frac{5000\text{m}^3}{1\text{døgn}}$

får vi:

$$y' = u - \frac{g}{V} y$$

Ligningen er igjen på formen $y' + ay = b$, ($y' + \frac{g}{V} y = u$) med løsningen $y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$, så vi får i dette tilfellet:

$y = \frac{Vu}{g} + Ce^{-\frac{g}{V}t}$,   der $C = y(0) - \frac{Vu}{g}$

Løsningsmetode:

Separabel: $\int \frac{1}{u-\frac{g}{V}y}dy = \int dt \Leftrightarrow -\frac{V}{g}\ln|u - \frac{g}{V}y| = t + C_1 \Leftrightarrow$

$\ln|u - \frac{g}{V}y| = C_2 - \frac{g}{V}t \Leftrightarrow$

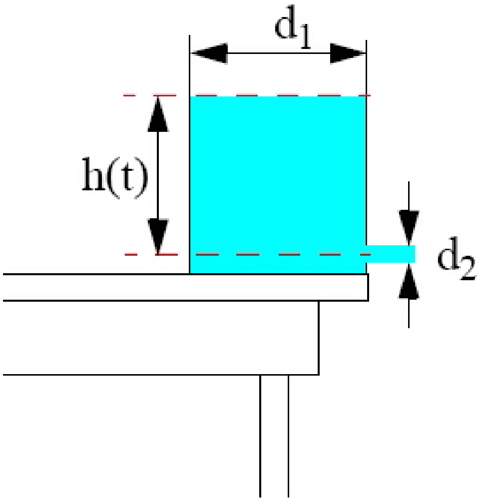
$u - \frac{g}{V}y = C_3 e^{-\frac{g}{V}t} \Leftrightarrow \frac{g}{V}y = u - C_3 e^{-\frac{g}{V}t} \Leftrightarrow$

$y = \frac{Vu}{g} - Ce^{-\frac{g}{V}t}$

Der $y_\infty = \frac{Vu}{g}$ og $C = y_\infty - y(0)$

VII Toricellis tømming av vanntank:

(Ny bok: Se oppgavene 6.84 og E 75.)
Fra forsøk tidligere semestere:



I et lite tidsrom Δt vil volumet i flasken avta med $\Delta V = \Delta h \cdot \pi \frac{d_1^2}{4}$
som er like volumet som passerer ut av det lille hullet: $\Delta V = \pi \frac{d_2^2}{4} v\Delta t$ (Hastighet v)
Altså har vi ligningen:

$$\Delta h \cdot \pi \frac{d_1^2}{4} = -\pi \frac{d_2^2}{4} v\Delta t$$

Eller etter forkorting:

$$\Delta h \cdot d_1^2 = -d_2^2 v\Delta t$$

Potensiell høydeenergi går over i kinetisk energi, så vi har:

$$\Delta mgh = \frac{1}{2}\Delta mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Setter vi inn $v = \sqrt{2gh}$ i høyresiden av ligningen, får vi:

$$\Delta h \cdot d_1^2 = -d_2^2 \sqrt{2gh}\,\Delta t$$

Differensialligningen er da grenseverdien av denne ligningen:

$$h' = -(\frac{d_2}{d_1})^2 \sqrt{2g}\,\sqrt{h}$$

Eller enklere:

$$h' = -k\sqrt{h}$$

Løsningsmetode:

Separabel: $\int h^{-\frac{1}{2}}\,dh = -k\int dt$

$$\frac{h^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -kt + D \Leftrightarrow 2\sqrt{h} = D - kt \Leftrightarrow$$
$$h = (C - \tfrac{k}{2}t)^2 \qquad \text{der } C = \sqrt{h(0)}\,,\ k = (\tfrac{d_2}{d_1})^2\sqrt{2g}$$

Oppgaver

I Eksponentiell vekst - $y' = ky$

680 (Tilsvarende oppgaver i ny bok: 6.65, 6.66)

Dyrepopulasjon N vokser i henhold til modellen $N' = kN$.
Hvilken type ligning? Finn k hvis populasjonen fordobles på 30 timer eller 30 døgn.
a) $N' = kN \Leftrightarrow N' - kN = 0$
Lineær, første orden, homogen med konstante koeffisienter, dessuten separabel.
b) $\int \frac{1}{N}dN = k\int dt, \qquad N \neq 0 \Leftrightarrow \ln|N| = kt + D \Leftrightarrow N = Ce^{kt}$
$t = 0 : N(0) = C : N = N(0)e^{kt}$
1) $N(30) = 2N(0) \Leftrightarrow 2N(0) = N(0)e^{k30} \Leftrightarrow e^{k30} = 2 \Leftrightarrow k30 = \ln 2 \Leftrightarrow$
$k = \frac{\ln 2}{30} \approx 0.00231$ [1/h]
(Kunne altså skrevet som: $N = N(0)(2)^{\frac{t}{30}}$)
2) $e^{k\cdot 30\cdot 24} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{30\cdot 24} \approx 0.000963$ [1/h]

II Eksponentielt avtagende $y' = -ky$

649

En radioaktiv isotop har halveringstid på 14.3 døgn. Aktiviteten gitt av differensialligningen $A'(t) = -kA(t)$, der t er målt i døgn.
Finn omdanningskonstanten k og hvor lang tid til aktiviteten er redusert med 25%.
$A(t) \neq 0$: $\int \frac{1}{A}dA = -k\int dt \Leftrightarrow \ln|A| = -kt + D \Leftrightarrow A(t) = Ce^{-kt}$
der $A(0) = C$
a) $A(14.3) = \frac{A(0)}{2} \Leftrightarrow \frac{A(0)}{2} = A(0)e^{-k14.3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-14.3k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-14.3} \approx 0.0485$ [1/døgn]

b) $A(0)\cdot 0.75 = A(0)e^{-0.0485t} \Leftrightarrow 0.75 = e^{-0.0485t} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0.75}{-0.0485} \approx 5.93$ [døgn]

683

Kroppstemperatur til person i vann som holder 0 °C utvikler seg i henold til differensialligningen $y' = -0.012y$. Forklar modellen og finn ut hvor lang tid det tar før kroppstemperaturen er 25 °C. Hvor fort endrer temperaturen seg 5 minutter etter at personen falt i vannet?

a) Temperaturfall i $^\circ C/\min$ er proporsjonalt med kroppstemperaturen.
Proporsjonalitetsfaktor: $k = -0.012$ [1/min]

b) Separabel: $\int \frac{1}{y} dy = -0.012 \int dt, \qquad y \neq 0$

$$ln|y| = -0.012t + C_1 \Leftrightarrow y = Ce^{-0.012t}$$
$$t = 0: \qquad y(0) = C$$
$$y = y(0)e^{-0.012t}$$
$$y(0) = 37 \; [^\circ\text{C}]$$
$$25 = 37e^{-0.012t} \Leftrightarrow e^{-0.012t} = \frac{25}{37} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{25}{37}}{-0.012} \approx 32.7 \; [\text{min}]$$

c)
$$y'(5) = -0.012y(5) = -0.012 \cdot 37e^{-0.012 \cdot 5} \approx -0.418 \; [^\circ\text{C/min}]$$

III Logistisk vekst - Vekst med begrensning

647 (Tilsvarende i ny bok: 6.67, 6.68)

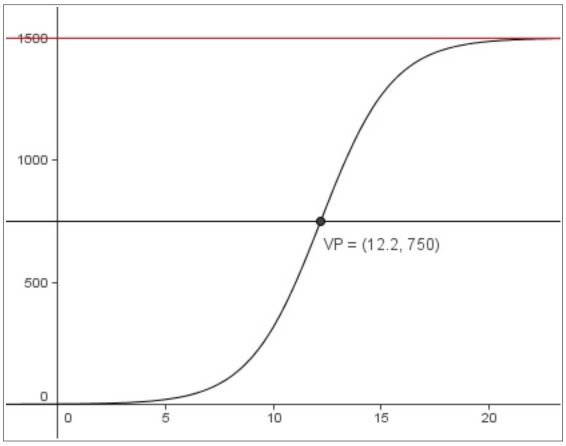
Epidemi som følger modellen:
$$N' = 0.0004N(1500 - N) \qquad [\text{Smittede}], \qquad t \in [0, \infty\rangle \; [\text{uker}]$$
a) Hvor mange er mottagelige for smittet? b) Når øker antall smittede raskest?
c) Hva er initialbetingelsen for differensialligningen? d) Finn $N(t)$.
a) Begrensningen 1500 sier oss at at antall mottagelige for smitte er større enn 1500.
(Jeg ville ikke sagt at antallet var eksakt 1500, det kan jo hende noen mottagelige aldri traff noen smittekilder...)
b) $N' = f(N) = 0.6N - 0.0004N^2$
$$f'(N) = 0.6 - 0.0008N$$
$$f'(N) = 0 \Leftrightarrow N = \frac{0.6}{0.0008} = 750 \qquad = \frac{1500}{2}!$$
$N(t)$ er symmetrisk om dette punktet, som er vendepunkt!

Maksimal vekst altså når $N = \frac{1500}{2} = 750$
x-koordinat: Se d)
c) Den opprinnelige smittekilden: $N(0) = 1$
d)
Separabel: $\int \frac{1}{N(1500-N)} dN = 0.0004 \int dt, \qquad N \neq 0, N \neq 1500$
Delbrøkoppspaltning: $\frac{1}{1500} \int (\frac{1}{N} + \frac{1}{1500-N}) dN = 0.0004 \int dt$
$$\frac{1}{1500} \ln|N| - \ln|1500 - N| = 0.0004t + C_1$$
$$\ln\left|\frac{N}{1500-N}\right| = 1500 \cdot 0.0004t + C_2$$
$$\frac{N}{1500-N} = C_3 e^{0.6t}$$
$$N = 1500C_3e^{0.6t} - NC_3e^{0.6t}$$
$$N = \frac{1500C_3e^{0.6t}}{1+C_3e^{0.6t}} = \frac{1500}{1+Ce^{-0.6t}}$$

Vi har dessuten løsningen (se forutsetninger):
$N = 0 \qquad (N = 1500$ inkludert i $C = 0.)$

Initialbetingelse:
$$N(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1500}{1+C} = 1 \Leftrightarrow C = 1500 - 1 = 1499$$
(C er generelt forholdet: $\frac{1500-N(0)}{N(0)} = \frac{\text{Ikke smittede}}{\text{Smittede}}$ når $t = 0$.)

$N(t) = \frac{1500}{1+1499e^{-0.6t}}$



t –koordinat for vendepunkt med maksimal vekst:

$750 = \frac{1500}{1+1499e^{-0.6t}} \Leftrightarrow 1 + 1499e^{-0.6t} = 2 \Leftrightarrow e^{-0.6t} = \frac{1}{1499} \Leftrightarrow$

$t = \frac{\ln \frac{1}{1499}}{-0.6} \approx 12.2$ [uker]

652

a) b) c) Akkurat som 647 og tidligere under oversikten i dette notatet:

$N = \frac{B}{1+Ce^{-kBt}}$, der $C = \frac{B-N(0)}{N(0)}$

Maksimal vektst/vendepunkt når $N(t) = \frac{B}{2}$ og t gitt av:

$\frac{B}{2} = \frac{B}{1+Ce^{-kBt}} \Leftrightarrow 1 + Ce^{-kBt} = 2 \Leftrightarrow Ce^{-kBt} = 1 \Leftrightarrow$

$t = \frac{\ln \frac{1}{C}}{-kB} = \frac{\ln 1 - \ln C}{-kB} = \frac{-\ln C}{-kB} = \frac{\ln C}{kB} - \frac{\ln \frac{B-N(0)}{N(0)}}{kB}$

653

23 sauer ble i 1803 satt ut i Tasmania. Toppnivå ble 2.2 mill. sauer i 1853.
Etter dette gikk bestanden fort ned. Deretter og frem til 1936 lå antallet
sauer stabilt mellom 1.5 og 1.7 mill. individer.

a) Skisser kurve for perioden 1803-1936

b) Anta at $k = 2.3 \cdot 10^{7}$ og at utviklingen følger logistisk modell.
Finn et uttrykk y for bestanden.

c) Når vokste bestanden raskest?

a) Se kommentar under b).

b) 1803 : $t = 0$: $y(0) = 23$ [sauer]

Bæreevne: $B = 1600000$ [sauer]

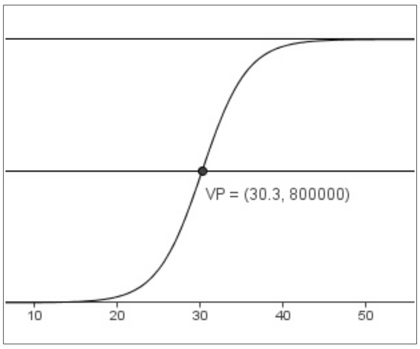
$y' = ky(B - y)$ gir da som i oppgavene foran og tidligere under oversikten i dette notatet:

$y = \frac{B}{1+Ce^{-kBt}}$, der $C = \frac{B-y(0)}{y(0)}$

Initialbetingelser og bæreevne gir: $C = \frac{1600000-23}{23} = \frac{1599977}{23} \approx 69600$

$kB = 2.3 \cdot 10^{-7} \cdot 1600000 = 0.368$

$y = \frac{1600000}{1+69600e^{-0.368t}}$



Kommentar:
Den forenklede logistiske modellen er litt virkelighetsfjern, da populasjonen i praksis alltid vil gå over begrensningen før den svinger tilbake og stabiliserer seg...
Kunne lagt inn virkelig utvikling som først en logistisk kurve med begrensning 2.2 mill. som passeres i $t = 50$ (1853) og deretter en logistisk kurve som starter på 2.2 mill. og raskt flater ut på 1.6 mill. Prøv i GeoGebra!

c) Vendepunkt/raskest vekst i vendepunktet $(\frac{\ln C}{kB}, \frac{B}{2})$:

$y = \frac{1600000}{2} = 800\,000$

x gitt av: $800000 = \frac{1600000}{1+69600e^{-0.368t}} \Leftrightarrow 1 + 69600e^{-0.368t} = 2 \Leftrightarrow$

$e^{-0.368t} = \frac{1}{69600} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{69600}}{-0.368} \approx 30.3$

IV Fritt fall - Falskjemhopp

644

Ballkast rett oppover fra toppen av en bygning 30 meter over bakken:

$g = 9.81$ [m/s^2]
$m = 0.15$ [Kg]
$v(0) = 20$ [m/s] (Positiv retning oppover.)
$k = \frac{1}{30}$ [kg/s]

a) Hvor nøyt kommer ballen før den snur?
b) Hvor lang tid tar det fra ballen ble kastet til den lander på bakken?

a) Newtons andre lov: Kraft=masse*aksellerasjon
Tyngde-luftmostand=masse*derivert av hastighet
$-mg - kv = mv' \qquad \Leftrightarrow v' = -(g + \frac{k}{m}v)$

Kan løses med integrende faktor på formen $v' + \frac{k}{m}v = -g$
eller som separabel:

$\int \frac{1}{g+\frac{k}{m}v}dv = -\int dt \Leftrightarrow \frac{m}{k}\ln|g + \frac{k}{m}v| = -t + C_1 \Leftrightarrow \ln|g + \frac{k}{m}v| = -\frac{k}{m}t + C_2 \Leftrightarrow$

$g + \frac{k}{m}v = C_3e^{-\frac{k}{m}t} \Leftrightarrow \frac{k}{m}v = C_3e^{-\frac{k}{m}t} - g \Leftrightarrow v = Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$

$t \to \infty: \qquad v_\infty = -\frac{mg}{k} = -\frac{0.15\cdot 9.81}{\frac{1}{30}} = -44.1$ [m/s]

$t = 0: \qquad v(0) = 20 : 20 = C - \frac{mg}{k} \Leftrightarrow C = 20 + 44.1 = 64.1$

$v = 64.1e^{-0.222t} - 44.1$

Ballen snur når $v = 0 : 64.1e^{-0.222t} - 44.1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{44.1}{64.1}}{-0.222} \approx 1.68$ [s]
Høyde (veilengde) gitt av: $v(t) = s'(t) \Leftrightarrow s(t) = \int v(t)dt$
Så vi får:

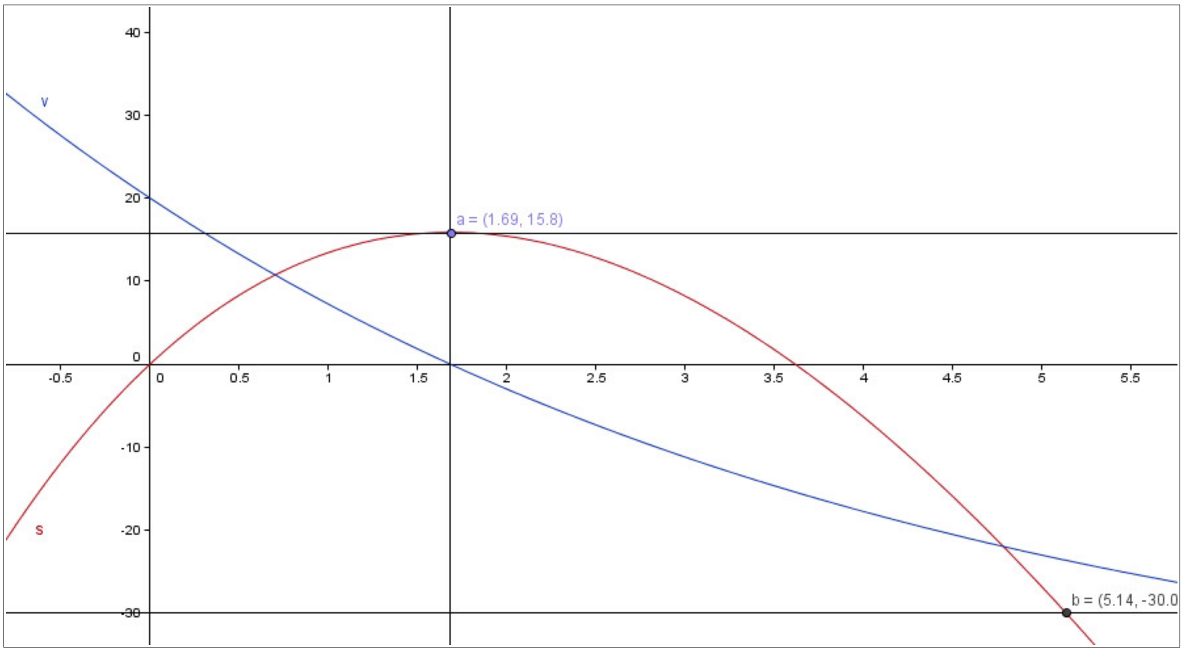
$$s(t) = \int(64.1e^{-0.222t} - 44.1)dt = \frac{64.1}{-0.222}e^{-0.222t} - 44.1t + C =$$

$$C - 44.1t - 289e^{-0.222t}$$

$s(0) = 0$ gir: $\quad 0 = C - 289 \Leftrightarrow C = 289$

Altså: $\quad s(t) = 289 - 44.1t - 289e^{-0.222t}$
$h = s(1.68) = 289 - 44.1 \cdot 1.68 - 289e^{-0.222 \cdot 1.68} = 15.9$ [m]
(Tilsvarer 45.9 m over bakken.)

Bakkenivå når:
$s(t) = -30 \Leftrightarrow 289 - 44.1t - 289e^{-0.222t} = 30 \Leftrightarrow$
$44.1t + 289e^{-0.222t} = 259$
Denne ligningen kan ikke løses eksakt, men vi kan løse den grafisk på lommeregner eller i GeoGebra. (Grafe venstre og høyre side og finne skjæringspunkt.)
Får da: $t \approx 5.1$ [s]



645 (Tilsvarende oppgaver i ny bok: 6.69, E74)

Gjenstand med masse m blir kastet oppover med utgangsfart $v(0) = -v_0$.
Anta at luftmotstanden øker med *kvadratet* av hastigheten.
Positiv retning oppover. Utled differensialligning:

Mer realistisk enn 644: $\quad L = kv^2$
Da får vi isteden: $\quad mg + kv^2 = mv'$ $\quad$ (Positiv retning nedover.)
$\quad v' = g + \frac{k}{m}v^2$
Initialbetingelse: $\quad v(0) = -v_0$

V Newtons avkjølingslov

642

$T' = -k(T - T_{omg})$ $\quad$ (T_{omg} istedenfor T_o, for ikke å forveksle med T_0. (Initialtemperatur.))

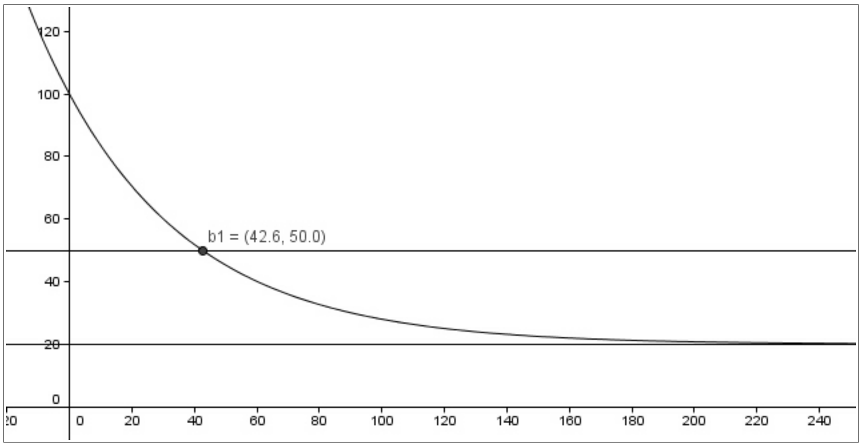
Endringen i temperatur per tidsenhet (T') er proporsjonal (k) med temperaturforskjellen ($T - T_{omg}$) i forhold til omgivelsene. Hvis temperaturen (T) er større en omgivelsene, vil temperaturen avta, derfor er endringen negativ.

687

Kjele med vann varmes opp til koking. Settes på benken til kjøling.
a) Sett opp differensialligning.
b) Anta romtemperatur 20 °C og at vannet startet på 100 °C.
Sett $k = 0.023$ [min^{-1}]
Hvor lang tid til 50 °C, 40 °C og 30 °C?
Se 642 og utledninger under oversikten tidligere i dette notatet:

a) $T' = -k(T - T_{omg})$
Separabel: $\int \frac{1}{T-T_{omg}} dT = -k\int dt \Leftrightarrow \ln|T - T_{omg}| = -kt + D \Leftrightarrow$
$T - T_{omg} = Ce^{-kt}$
$T = T_{omg} + Ce^{-kt}$
Initialbetingelse: $T(0) = T_0$ gir: $T_0 = T_{omg} + C \Leftrightarrow C = T_0 - T_{omg}$
Altså:
$$T = T_{omg} + (T_0 - T_{omg})e^{-kt} \qquad [^\circ C], \qquad t \in [0, \infty\rangle \text{ [min]}$$
b) $T_0 = 100\ [^\circ C], \qquad T_{omg} = 20\ [^\circ C], \qquad k = 0.023$ [1/min]
gir:
$$T = 20 + 80e^{-0.023t}$$

1) $50 = 20 + 80e^{-0.023t} \Leftrightarrow e^{-0.023t} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{3}{8}}{-0.023} = 42.6$ [min]
2) 3) Tilsvarende...



VI Utslippsproblematikk og vanntanker

657 (Tilsvarende oppgaver i ny bok: 6.63, 6.64, 6.85)

Vanntank med 200 liter rent vann, tilføres saltvann med 5.0 g/liter med fart på 6.0 liter/min. Tappes ut 8.0 liter/min i bunnen av tanken.
a) Hvor lang tid tar det før tanken er tom?
b) Finn uttrykk for saltkonsentrasjonen ved tiden t.
c) Sett opp differensialligning.
d) Når inneholder vanntanken maksimalt med salt, og hvor mye salt er det da?
$V = 200$ [L], $\qquad k = 5$ [g/L], $\qquad i = 6$ [L/min], $\qquad u = 8$ [L/min]

$m(0) = 0$ [g]

a) $ut_{tom} - it_{tom} = V \Leftrightarrow t_{tom} = \frac{V}{u-i} = \frac{200}{8-6} = 100$ [min]

b) Saltkonsentrasjon ved tiden t: $\frac{m}{V+it-ut} = \frac{m}{200+6t-8t} = \frac{m}{200-2t}$ [g/L]

c) Endring saltmengde per tidsenhet= inn - ut

$m' = ki - \frac{m}{V+it-ut}u$ eller
$m' = 5 \cdot 6 - \frac{m}{200+6t-8t}8 \Leftrightarrow m' = 30 - \frac{8}{200-2t}m \Leftrightarrow$
$m' + \frac{4}{100-t}m = 30, \quad m(0) = 0$ [g]

d) Integrerende faktor: $IF = e^{\int \frac{4}{100-t}dt} = e^{-4\ln(100-t)} = \frac{1}{(100-t)^4}$
$(m\frac{1}{(100-t)^4})' = \frac{30}{(100-t)^4}$
$m\frac{1}{(100-t)^4} = \int \frac{30}{(100-t)^4}dt = \frac{10}{(100-t)^3} + C$ (Variabelskifte: $u = 100 - t$)
$m = 10(100-t) + C(100-t)^4$

$m(0) = 0$ gir: $0 = 10 \cdot 100 + C \cdot 100^4 \Leftrightarrow C = -0.00001$

$m = 10(100-t) - 0.00001(100-t)^4$

$m' = 10(-1) + 0.00001 \cdot 4(100-t)^3 = +0.00004(100-t)^3 - 10$

$m' = 0 \Leftrightarrow 0.00004(100-t)^3 - 10 = 0 \Leftrightarrow (100-t)^3 = 250000 \Leftrightarrow$

$100 - t = \sqrt[3]{250000} \Leftrightarrow t \approx 100 - \sqrt[3]{250000} \approx 37$ [min]

$m(37) = 10(100-37) - 0.00001(100-37)^4 \approx 472$ [g]

X6.7

Insjø forurenses av fabrikk. 500 kg forurensninger i innsjøen i starten.
Fabrikken slipper ut omtrent 100 kg forurensninger per. år. Via et vassdrag forsvinner ca 10% av mengden med forurensninger årlig.
Vi antar modellen $y' = 100 - 0.1y$ og $y(0) = 500$.
a) Forklar modellen.
b) Løs differensialligningen.
c) Hvordan går det med forurensningen på sikt?

Forurensing: $y(0) = 500$ [kg]
Utslipp per år: $u = 100$ [kg/år]
Utskiftingsfaktor: $k = 0.1$

a)
Endring per tidsenhet (år)= utslipp per år - utskiftingsfaktor•forurensing
$y' = 100 - ky$ [kg/år], $t \in [0, \infty\rangle$ [år]

$y' = 100 - 0.1y, \quad y(0) = 500$ [kg]

b) Separabel: $\int \frac{1}{100-0.1y}dy = \int dt, \quad y \neq 0$

$\frac{1}{-0.1}\ln|100-0.1y| = t + C_1 \Leftrightarrow \ln|100-0.1y| = -0.1t + C_2 \Leftrightarrow$
$100 - 0.1y = C_3e^{-0.1t} \Leftrightarrow$
$y = 1000 - Ce^{-0.1t}$
Initialbetingelse gir: $500 = 1000 - C \Leftrightarrow C = 500$

$y = 1000 - 500e^{-0.1t}$

c) $t \to \infty \Rightarrow y \to 1000$ [Kg] (Stabiliserer seg på et stabilt nivå.)

For moro skyld tar vi dette også som en følge og rekke oppgave.
(K2: Algebra) (Ny bok: K7)

Tilnærmet kunne vi også løst dette som en rekkeutvikling:
$a_1 = 500$
$a_2 = a_1 + 100 - 0.1a_1 = 100 + 0.9a_1$
osv...

Rekursivt definert: $a_1 = 500, \quad a_{n+1} = 100 + 0.9a_n$

Dette tilsvarer økonomiske kontoeksempler med faste innskudd:
I tabell:

$n = 0$	1	2	$\dots$	n
500	$500 \cdot 0.9$	$500 \cdot 0.9^2$		$500 \cdot 0.9^n$
	100	$100 \cdot 0.9$		$100 \cdot 0.9^{n-1}$
		100	$\dots$	$\dots$
				$\dots$
				$100 \cdot 0.9$
				100

Etter n år har vi altså, som summen av siste kolonne:
$a_n = 100\frac{0.9^n-1}{0.9-1} + 500 \cdot 0.9^n = \frac{100}{-0.1}(0.9^n - 1) + 500 \cdot 0.9^n$
$a_n = -1000 \cdot 0.9^n + 1000 + 500 \cdot 0.9^n = 1000 - 500 \cdot 0.9^n$

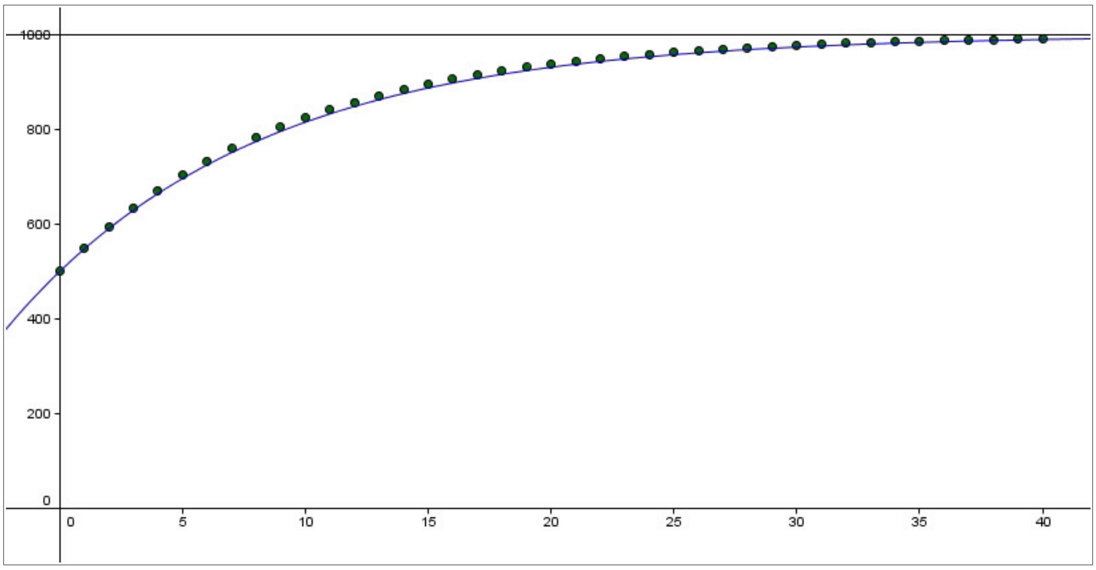
Setter vi inn: $0.9 = e^{\ln 0.9} = e^{-0.105}$, får vi:

$a_n = 1000 - 500e^{-0.105n}$

som ikke er så lang unna den mer nøyaktige løsningen
differensialligningen ga:

$y = 1000 - 500e^{-0.1t}$

Grafisk: y som kurve og a_n som prikker:



Forskjellen i disse to modellene er at differensialligningen tilsvarer virkeligheten bedre, med *kontinuerlige* utslipp hele året gjennom,
mens rekkeutviklingen tilsvarer at både utslippet og utskifting skjedde en gang i året på 31 desember.
Grunnen til at tilnærmingen er bra her, er at tidsintervallet på et år er lite i forhold til den 40 års perioden jeg har tatt med i grafen.

VII Toricellis lov

(Oppgaver i ny bok: 6.84, E75)

Ifølge oversikten tidligere i dette notatet vil høyden på en væskemengde i en sylindrisk tank med hull avta etter denne differensialligningen:

$h' = -(\frac{d_2}{d_1})^2 \sqrt{2g}\,\sqrt{h}$ der d_1 og d_2 er diameterene i tanken og hullet.

Løsning:

$h = (C - \frac{k}{2}t)^2$ der $C = \sqrt{h(0)}$, $k = (\frac{d_2}{d_1})^2\sqrt{2g}$

I et forsøk fra tidligere år med en flaske, hadde vi disse målene:

Diameter i flaske: $d_1 = 0.091$ m
Diameter i hull: $d_2 = 0.005$ m
Starthøyde: $h_0 = 0.20$ m

Og får derfor: $k = (\frac{0.005}{0.091})^2\sqrt{2 \cdot 9.81} = 0.0134$

$h(t) = (\sqrt{0.20} - \frac{0.0134}{2}t)^2 = (0.447 - 0.0067t)^2 =$
$0.0000449t^2 - 0.00599t + 0.200$

Regresjonen i GeoGebra ga: $r(t) = 0.0000309t^2 - 0.00493t + 0.200$
Nivå 0 når: $0 = (0.447 - 0.0067t)^2 \Leftrightarrow t = \frac{0.447}{0.0067} = 66.7$ [s] (Differensialligning)
ca. 80 [s] (Måling og regresjon)

Vi ser av grafen at differensialligningen ikke stemmer helt,

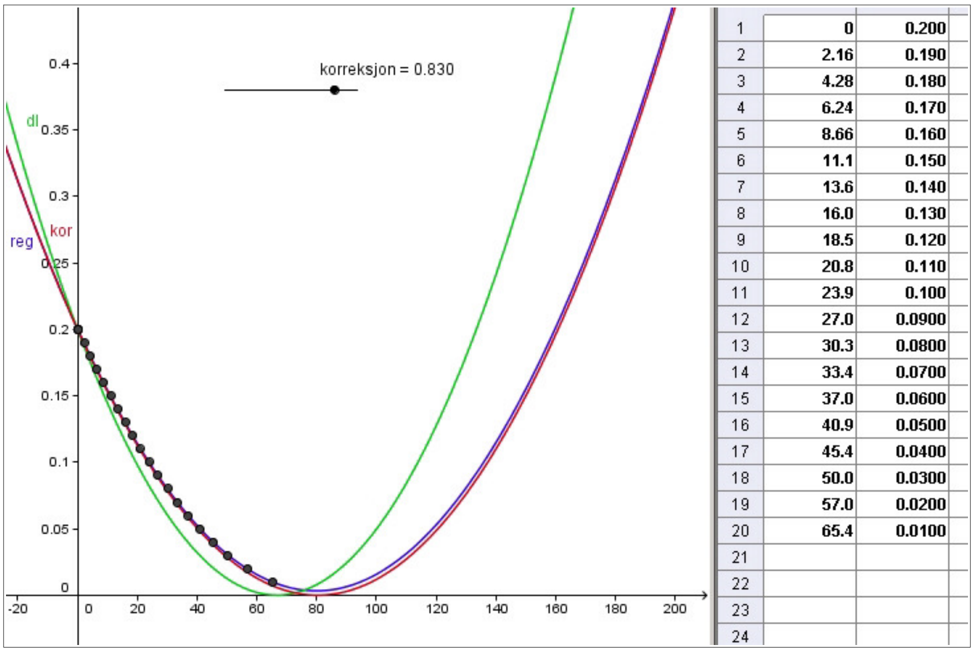
antageligvis fordi det er en viss friksjon i utløpet og tap av energi.
Tiden på tømming er også ca. 13 sekunder for kort.
Vi innfører en kalibrering/korreksjon: $korr = \frac{t_{målt}}{t_{slutt}} = \frac{66.9}{80} = 0.836$

Slik at ligningen blir: $h'(t) = -korr \cdot k\sqrt{h}$

Og løsningen blir:

$$h(t) = (0.447 - korr \cdot 0.0067t)^2$$

Med GeoGebra og *korr* som glider får vi bra resultat når $korr = 0.83$:



1	0	0.200
2	2.16	0.190
3	4.28	0.180
4	6.24	0.170
5	8.66	0.160
6	11.1	0.150
7	13.6	0.140
8	16.0	0.130
9	18.5	0.120
10	20.8	0.110
11	23.9	0.100
12	27.0	0.0900
13	30.3	0.0800
14	33.4	0.0700
15	37.0	0.0600
16	40.9	0.0500
17	45.4	0.0400
18	50.0	0.0300
19	57.0	0.0200
20	65.4	0.0100
21		
22		
23		
24		