Løsningsskisser - Kapittel 6 - Differensialligninger

Vi bruker det vi har lært i 6.3 om løsning av separable differensialligninger også i noen av oppgavene fra 6.1 og 6.2 for å knytte denne løsningsteknikken til flere eksempler enn oppgavene i 6.3.

602

a) $VS = y' = \sin x' = \cos x$
$HS = \cos x$
QED

b) $VS = y'' + y = \sin x'' + \sin x = \cos x' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$
$HS = 0$
QED

c) $VS = -5y'' - 3y' + y = -5(\sin x)'' - 3(\sin x)' + \sin x = -5\cos x' - 3\cos x + \sin x =$
$5\sin x - 3\cos x + \sin x = 6\sin x - 3\cos x$
$HS = 6\sin x - 3\cos x$
QED

603

a) $y' = y$

b) $y' + y = x$

604

Eksakte differensialligninger, det vil si differensialligninger som kan løses direkte med integrasjon:

a) $y' = 0 \Leftrightarrow y = \int 0 dx = C$

b) $y' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

c) $2y' - 4x = \cos x \Leftrightarrow y = \int (\frac{1}{2}\cos x + 2x) dx = \frac{1}{2}\sin x + x^2 + C$

d) $v' - 3t = e^t \Leftrightarrow v = \int (e^t + 3t) dt = e^t + \frac{3}{2}t^2 + C$

606

a) $y' = 3x\cos x \Leftrightarrow y = 3\int x\cos x dx$
Delvis integrasjon gir:
$y = 3(x\sin x - \int 1 \sin x dx) = 3x\sin x + 3\cos x + C$

b) $y'' = 0 \Leftrightarrow y' = \int 0 dx = C \Leftrightarrow y = \int C dx = Cx + D$

c) $y'' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y' = \ln|x| + C \Leftrightarrow y = \int \ln|x| dx + \int C dx = x\ln|x| - x + Cx + D$

d) $N''' = \cos t \Leftrightarrow N'' = \sin t + A \Leftrightarrow N' = -\cos t + At + B \Leftrightarrow N = -\sin t + Ct^2 + Dt + E$

607

$y'' = y$

a) Dette klarer dere selv...

b) $VS = y'' = (C_1e^x + C_2e^{-x})'' = (C_1e^x - C_2e^{-x})' = C_1e^x + C_2e^{-x}$
$HS = y = C_1e^x \; + C_2e^{-x}$
QED

608

a) Tar det i flere trinn:
$y'' = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)'' = (-C_1 \sin x + C_2 \cos x)' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$
$VS = y'' + y = -C_1 \sin x - C_2 \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$
$HS = 0$
QED

b) Da $C_1 \sin kx + C_2 \cos kx = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,\sin(kx + \varphi)$ i henhold til teknikken på side 155, er dette rimelig opplagt.

$y'' = (A\sin(kx + \varphi))'' = (Ak\cos(kx + \varphi))' = -Ak^2 \sin(kx + \varphi)$
$VS = y'' + k^2y = -Ak^2 \sin(kx + \varphi) + k^2A\sin(kx + \varphi) = 0$
$HS = 0$
QED

Teknikken side 155 sier oss at da må selvfølgelig også $C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ være løsning av $y'' + k^2y = 0$.

609

a) Løsning innsatt i differensialligning gir ligningen:
$(e^{5x})' + k(e^{5x}) = 8e^{5x} \Leftrightarrow 5e^{5x} + ke^{5x} = 8e^{5x} \Leftrightarrow (5 + k)e^{5x} = 8e^{5x} \Leftrightarrow$
$5 + k = 8 \Leftrightarrow k = 3$

b) $(k \sin x)'' = \sin x \Leftrightarrow (k \cos x)' = \sin x \Leftrightarrow -k \sin x = \sin x \Leftrightarrow -k = 1 \Leftrightarrow k = -1$

c) Tar det trinn for trinn for oversiktens skyld:
$y = e^{-x} \sin kx$ gir:
$y' = -e^{-x} \sin kx + e^{-x}k \cos kx$
$y'' = e^{-x} \sin kx - e^{-x}k \cos kx - e^{-x}k \cos kx - e^{-x}k^2 \sin kx =$
$(1 - k^2)e^{-x} \sin kx - 2e^{-x}k \cos kx$

Innsatt i differensialligning:
$y'' + 2y' + 5y = 0 \Leftrightarrow$
$(1 - k^2)e^{-x} \sin kx - 2e^{-x}k \cos kx + 2(-e^{-x} \sin kx + e^{-x}k \cos kx) + 5e^{-x} \sin kx = 0 \Leftrightarrow$
$(1 - k^2 - 2 + 5)e^{-x} \sin kx = 0 \Leftrightarrow$
$(4 - k^2) \sin kx = 0 \Leftrightarrow$

$k = \pm 2$

610

a) $y' = 2\sqrt{x}$ (Eksakt: Løses ved direkte integrasjon.)
b) $y' = 2xy$ (Separabel (se 6.3): $\int \frac{1}{y} dy = 2 \int x dx$)
c) $\frac{s}{s''} = \frac{t^2}{2} \Leftrightarrow t^2 s'' - 2s = 0$ (Andre orden, se 6.6)

611

a) $(e^x y)' = e^x y + e^x y'$ (Produktregel for derivasjon.)

b) Da kan vi gjøre om venstre side av differensialligningen og får:
$(e^x y)' = \cos x \Leftrightarrow e^x y = \int \cos x dx = \sin x + C \Leftrightarrow y = Ce^{-x} + e^{-x} \sin x$

Denne type triks med produktregel og brøkregel for derivasjon gir oss lett noen andre formler det kan være lurt å notere ned og kjenne til:

$$xy' + y = f(x) \Leftrightarrow (xy)' = f(x) \Leftrightarrow xy = \int f(x) dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \int f(x) dx$$

$$xy' - y = f(x) \Leftrightarrow \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow y = x \int \frac{f(x)}{x^2} dx$$

$$xy' + ny = f(x) \Leftrightarrow x^n y' + n x^{n-1} y = f(x) x^{n-1} \Leftrightarrow (x^n y)' = f(x) x^{n-1} \Leftrightarrow y = x^{-n} \int f(x) x^{n-1} dx$$

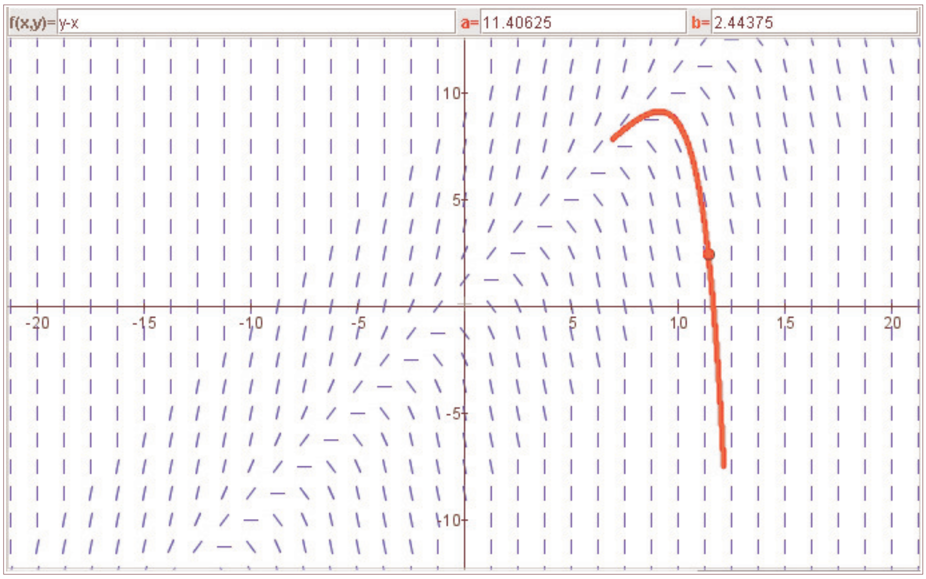
$$xy' - ny = f(x) \Leftrightarrow \frac{x^n y' - n x^{n-1} y}{(x^n)^2} = f(x) \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x^n}\right)' = f(x) \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \Leftrightarrow y = x^{-n} \int f(x) \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} dx$$

(n heltall!)

615

For å lage retningsdiagram bruker vi:
http://www.math.psu.edu/dlittle/java/calculus/slopefields.html

$y' = y - x$ gir da:



a) $y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$

b) $VS = y' - y + x = (x+1)' - (x+1) + x = 1 - x - 1 + x = 0$
$HS = 0$
QED

Generell løsning:
Ikke separabel, men kan løses med "Integrerende faktor" som kommer i kapittel 6.4.

Vi skriver på såkalt lineær form: $y' - y = -x$ og multipliserer med $IF = e^{-x}$ og får:

$$y'e^{-x} + y(-e^{-x}) = -xe^{-x}$$

Igjen bruker vi multiplikasjonsregelen for derivasjon og omformer til:

$$(ye^{-x})' = -xe^{-x} \Leftrightarrow ye^{-x} = -\int xe^{-x}dx$$

Delvis integrasjon gir:

$$ye^{-x} = xe^{-x} - \int e^{-x}dx = xe^{-x} + e^{-x} + C$$

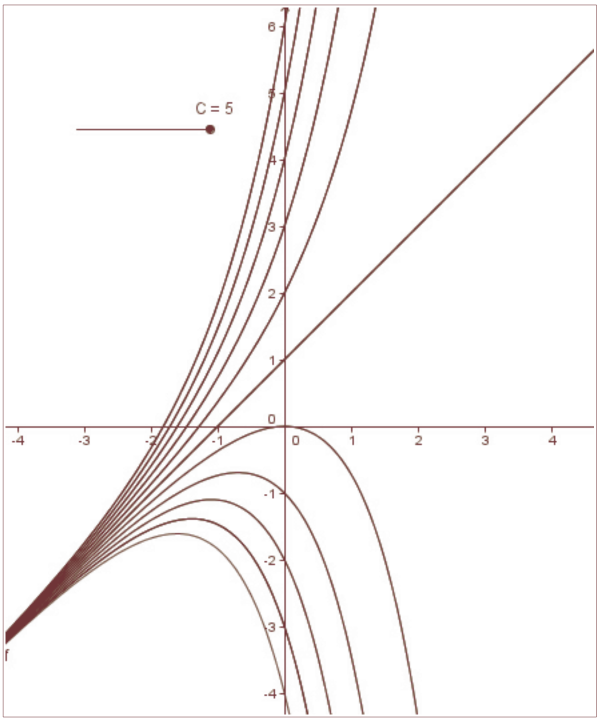
og løsningen:

$$y = x + 1 + Ce^{x}$$

Vi ser at vi får løsningen i a) og b) gjennom $(0,1)$ ved å sette $C = 0$.

Kontroll: Finne C med initialbetingelsen $y(0) = 1$:
$$1 = 0 + 1 + Ce^{0} \Leftrightarrow 1 = 1 + C \Leftrightarrow C = 0$$

I GeoGebra kan vi gjøre:
- Glider C, fra -5 til 5 med animasjonstrinn 1, start på 0
- f(x)=x+1+C*exp(x)
- Høyreklikk på graf, sett på sporing og reguler C



617

a) $y' = 2x - 5 \Leftrightarrow y = \int(2x-5)dx = x^2 - 5x + C$
$y(1) = 0$ gir: $1^2 - 5 \cdot 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 4 \qquad) : y = x^2 - 5x + 4$

b) $y' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
$y(1) = 5$ gir: $\ln|1| + C = 5 \Leftrightarrow C = 5 \qquad) : y = \ln|x| + 5$

c) $y' = \cos 3x \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$
$y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}$ gir: $\frac{1}{3}\sin(3\frac{\pi}{2}) + C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(-1) + C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}$
$) \ : y = \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{2}{3}$

620

Vi skal senere, på fagdag 8, se på et avansert matematisk verktøy:
Bruksanvisning: http://sinusr2.cappelendamm.no/binfil/download.php?did=36276
Nedlasting: http://www.moglestu.vgs.no/maxima/
som løser blandt annet differensialligninger.

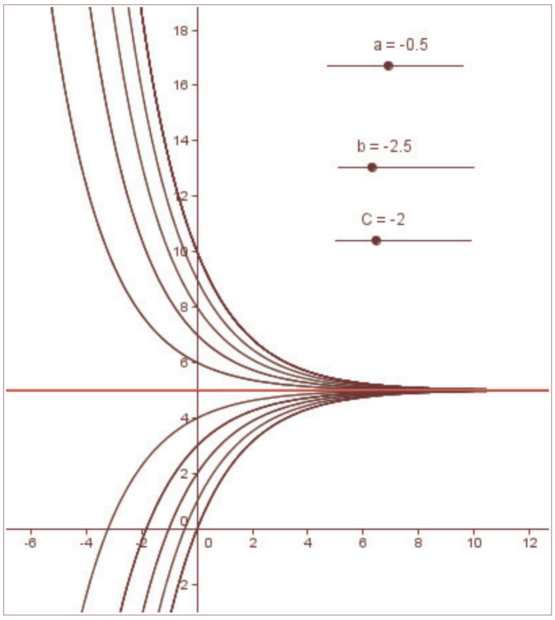
Foreløpig klarer vi dette uten datamaskin :-)
$y' = ay + b$ er separabel:
$\frac{y'}{ay+b} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{1}{ay+b}dy = \int dx \Leftrightarrow \frac{1}{a}\ln|ay + b| = x + D \Leftrightarrow$
$\ln|ay + b| = ax + E \Leftrightarrow ay + b = \pm e^{ax+E} = \pm e^{ax}e^{E} = e^{ax}F \Leftrightarrow$
$y = \frac{b}{a} + \frac{F}{a}e^{ax} = \frac{b}{a} + Ce^{ax}$

(C, D, E, F konstanter, som vi forenkler etterhvert.)

a) Hvis $y = \frac{b}{a} + Ce^{ax}$ skal nærme seg $y = 5$ må enten
$C = 0$ og $\frac{b}{a} = 5 \qquad) \ : y = 5$

eller
$\frac{b}{a} = 5$ og $a < 0$) : $y = 5 + Ce^{ax}$, der $a < 0$

b) $a > 0$ og $\frac{b}{a} = 5$) : $y = 5 + Ce^{ax}$, der $a > 0$
Prøv i GeoGebra, med glidere** a, b **og** C **og f(x)=b/a+C*exp(a*x) !



621

$y' + ay = b$ er omtrent som i 621 ($y' - ay = b$)

a) Separabel (Se 6.3):
$\int \frac{1}{b-ay} dy = \int dx \Leftrightarrow -\frac{1}{a} \ln|b - ay| = x + D \Leftrightarrow \ln|b - ay| = -ax + E \Leftrightarrow$
$b - ay = Fe^{-ax} \Leftrightarrow y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$

b) Bruk GeoGebra med:
-glidere a,b og C
-f(x)=b/a+C*exp(-a*x)

c) 1) Kurven nærmer seg horisontal asymptote $y = \frac{b}{a}$ fortere og asymptoten går mot x-aksen.
2) Asymptoten fjerner seg fra x-aksen
3) Asymptoten ligger fast og løsningen nærmer seg asymptoten fortere.

(Jeg har her ikke diskutert hva som skjer når a eller b er negative.)

622

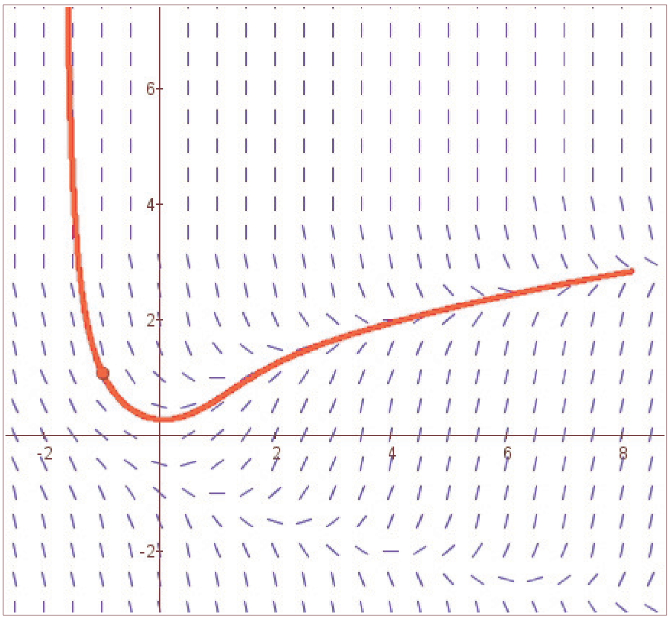
Bruk igjen: http://www.math.psu.edu/dlittle/java/calculus/slopefields.html

a) $y' = x - y^2$
Her må vi se hva som skjer til høyre i bildet. Fore en viss C ser det ut som om y' går mot 0.
Da er $x = y^2$ altså en liggende parabel. $y' = x - y^2$ er den eneste som kan produsere noe slikt.

Ved å sette inn alle forslagene i programmet slopefields ser vi også at $y' = x - y^2$ er den eneste som passer.

b) Stigningstall til tangenten i dette punktet: $S = y'(1) = 1 - 2^2 = -3$
Så vi får: $y - 2 = -3(x-1) \iff y = -3x + 5$

c) Slope Fields programmet gir:



For treningens skyld løser vi ligningene i 1 og 2.
(3 og 4 lar vi ligge, på tross av enkelt utseende ligger dette et stykke opp på universitetsnivå.)
1) Separabel: $\int y dy = \int x dx \iff \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + D \iff y^2 = x^2 + C \iff$
$y = \pm\sqrt{C + x^2}$
Dette er en hyperbel.

2) Må bruke integrerende faktor (Se 6.4). Vi multipliserer
$y' + y = x^2$ med e^x og får:
$y'e^x + ye^x = x^2e^x \iff (ye^x)' = x^2e^x \iff ye^x = \int x^2e^x dx$
Delvis integrasjon to ganger gir:
$ye^x = (2 - 2x + x^2)e^x + C$
med løsning:
$y = 2 - 2x + x^2 + Ce^{-x}$

623

a) Separabel: $\frac{1}{y}y' = 1$ b) Separabel: $\frac{1}{y+5}y' = 1$
c) Lineær, men ikke separabel: $y' - y = 5x$
d) Separabel: $\frac{1}{3y+y^2}y' = 1$ e) Separabel: $\frac{1}{y-3}y' = \frac{x}{x+9}$
f) Lineær, men ikke separabel: $y' - e^{-x}y = -e^{-x}\sin x$

624

a) $6\int y^2 dy = \int e^x dx \iff 2y^3 = e^x + D \iff y^3 = \frac{1}{2}e^x + C \iff$
$y = \sqrt[3]{C + \frac{1}{2}e^x}$

b) $\int \frac{1}{y} dy = \int x dx \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + D \Leftrightarrow y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

c) $\int y^{-2} dy = \int -2dx \Leftrightarrow \frac{y^{-2+1}}{-2+1} = -2x + D \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = D - 2x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x+C}$

625

a) $\int e^y dy = \int x dx \Leftrightarrow e^y = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y = \ln|\frac{x^2}{2} + C|$

b) $\int y^3 dy = \int x^2 dx \Leftrightarrow \frac{y^4}{4} = \frac{x^3}{3} + D \Leftrightarrow y^4 = \frac{4}{3}x^3 + C \Leftrightarrow y = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{3}x^3 + C}$

c) $\int y^{-2} dy = \int \sin(3x) dx \Leftrightarrow -y^{-1} = -\frac{1}{3}\cos(3x) + D \Leftrightarrow y = \frac{3}{C+\cos 3x}$

d) $\int \frac{1}{y} dy = -2\int dx \Leftrightarrow \ln|y| = -2x + D \Leftrightarrow y = Ce^{-2x}$

626

a) $\int y dy = -\int x dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + D \Leftrightarrow y^2 = C - x^2$
$y(-2) = 3$ gir: $3^2 = C - (-2)^2 \Leftrightarrow C = 13 \qquad) : y = \pm\sqrt{13 - x^2}$

b) $\int \frac{1}{y} dy = \int 6x dx \Leftrightarrow \ln|y| = 3x^2 + D \Leftrightarrow y = Ce^{3x^2}$
$y(0) = 2$ gir: $2 = Ce^0 \Leftrightarrow C = 2 \qquad) : y = 2e^{3x^2}$

630

Den såkalt logistiske ligning: $N' = 0.001N(500 - N)$
(Se 6.5 oppgave 6.24 og eksempel 5 side 288.)

$N' = kN$ er den vanlige eksponentielle vekst i populasjoner, der fødsler per tidsenhet er proporsjonalt med populasjonen.
Med bæreevne B får vi $N' = kN(B - N)$ som gjør at veksten flater ut når vi nærmer oss bæreevnen.

a) Differensialligningen er separabel:

$$\int \frac{1}{N(500-N)} dN = \int 0.001 dt, \qquad N(t) \neq 0 \wedge N(t) \neq 500$$

$N(t) = 0$ eller $N(t) = 500$ er faktisk løsninger, husk å ta med disse til slutt!

Delbrøkoppspalting gir:

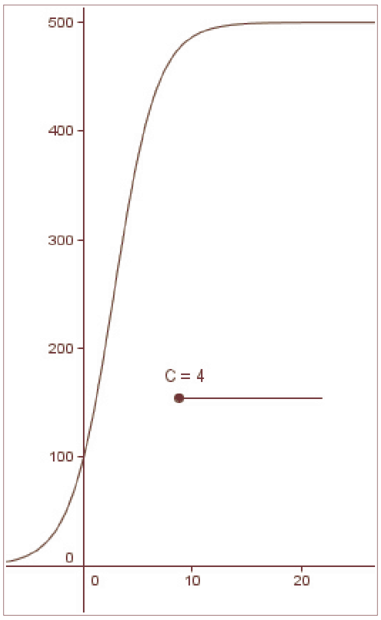
$$\frac{1}{500}\left(\int\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{500-N}\right)dN\right) = 0.001\int dt \Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{500-N}\right)dN = 0.5\int dt \Leftrightarrow$$

$$\ln|N| - \ln|500 - N| = 0.5t + D \Leftrightarrow \ln\left|\frac{N}{500-N}\right| = 0.5t + D$$
$$\frac{N}{500-N} = Ce^{0.5t} \Leftrightarrow N = 500Ce^{0.5t} - NCe^{0.5t} \Leftrightarrow N(1 + Ce^{0.5t}) = 500Ce^{0.5t} \Leftrightarrow$$

$$N = \frac{500Ce^{0.5t}}{1+Ce^{0.5t}} = \frac{500}{1+Ce^{-0.5t}}$$
eller $\quad N(t) = 0 \quad$ eller $\quad N(t) = 500 \qquad$ (Se forutsetninger i starten!)

b) Vi ser av funksjonsuttrykket at $t \to \infty \Rightarrow N \to 500$: $\qquad$ Horisontal asymptote:$y = 500$
Vi ser også at $N(0) = \frac{500}{1+C} \Leftrightarrow C = \frac{500}{N(0)} - 1$

Eksempelvis: $C = 4$ hvis $N(0) = 100$
c) Initialbetingelse gir: $25 = \frac{500}{1+C} \Leftrightarrow C = \frac{500}{25} - 1 = 19$
Geogebra med glider C og f(x)=500/(1+C*exp(-0.5*x)) gir:



631

a) 1) $y' + 4y = 0 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = -4 \int dx \Leftrightarrow \ln|y| = -4x + D \Leftrightarrow$
$y = Ce^{-4x}$

2) $y' + 4xy = 0 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = -4 \int x dx \Leftrightarrow \ln|y| = -2x^2 + D \Leftrightarrow$
$y = Ce^{-2x^2}$

3) $y' + \cos x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \cos x dx \Leftrightarrow \ln|y| = -\sin x + D \Leftrightarrow$
$y = Ce^{-\sin x}$

b) Fra a) aner vi et mønster: $y' + f(x)y = 0$ gir løsninger med $Ce^{-\int f(x)dx} = Ce^{-F(x)}$,
der $F'(x) = f(x)$.

I $y' + f(x)y = 0$ multipliserer vi derfor med $IF = e^{F(x)}$ (integrerende faktor, se 6.4) og får:

$$y'e^{F(x)} + ye^{F(x)}f(x) = 0$$

Multiplikasjonsregelen gir:

$$(ye^{F(x)})' = 0 \Leftrightarrow ye^{F(x)} = \int 0 dx = C \Leftrightarrow y = Ce^{-F(x)}$$

Vi ser at dette også vil gå bra med $y' + f(x)y = g(x)$, da får vi:

$(ye^{F(x)})' = g(x)e^{F(x)} \Leftrightarrow ye^{F(x)} = \int g(x)e^{F(x)} dx$ og løsningen:

$$y = e^{-F(x)} \int g(x)e^{F(x)} dx$$

Eksempel: $y' + \frac{1}{x}y = x$

Integrerende faktor: $IF = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

som gir: $xy' + 1y = x^2$ og $(xy)' = x^2 \iff xy = \frac{x^3}{3} + C$

og løsningen: $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

(Her kunne vi faktisk sett at den integrerende faktoren x ville fungere uten først å utføre $e^{\int \frac{1}{x}dx}$ hvis vi hadde tenkt på produktregelen direkte!)