

R2 - kapittel 5 EF og 6 ABCD

Løsningsskisser

Oppgave 1

Løs differensialligningene:

a) $y' + x = \cos x$

b) $y' = yx + x$

c) $y' = 1 + \frac{y}{x}$

a) Eksakt DL, løses direkte: $y' = \cos x - x$
 $y = \int (\cos x - x) dx = \sin x - \frac{1}{2}x^2 + C$

b) Lineær: $y' - xy = x$ (Kan løse med IF = $e^{-\int x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$)
 Er også separabel: $y' = x(y + 1)$

$y \neq -1$:
 $\int \frac{y'}{y+1} dx = \int x dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y+1} dy = \int x dx \Leftrightarrow$
 $\ln|y + 1| = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow |y + 1| = e^{\frac{x^2}{2} + C_1} \Leftrightarrow y + 1 = Ce^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow$
 $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$

$y = -1$ er også løsning, men er dekket av $C = 0$.

): $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$

(Løser med integrerende faktor for eksemplets skyld:

$y' + (-x)y = x$, $IF = e^{-\int x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$(ye^{-\frac{x^2}{2}})' = xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow ye^{-\frac{x^2}{2}} = \int xe^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Variabelskifte gir $\int xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int xe^u \frac{du}{x} = -\int e^u du = C - e^u = C - e^{-\frac{x^2}{2}}$

$ye^{-\frac{x^2}{2}} = C - e^{-\frac{x^2}{2}}$

): $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$)

c) Lineær ligning, løser mer integrerende faktor:

$y' - \frac{1}{x}y = 1$, $IF = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

(Mange roter her med $e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ og potensregler!)

$y' \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (y \frac{1}{x})' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \ln|x| + C \Leftrightarrow$

$$y = x \ln|x| + Cx$$

(Kunne også bruke brøkregele direkte, hvis man ser det:

$$y'x - y = x \Leftrightarrow \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{x}$$

Oppgave 2

Vis at differensialligningen $y' = y - y^2$ har den generelle løsningen $y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}}$.

Finn den spesielle løsningen som har initialbetingelsen $y(0) = \frac{1}{4}$.

Kan enten løse ligningen (se lengre ned), eller vise med innsetting:

$$y = (1 + Ce^{-x})^{-1} \Rightarrow y' = -(1 + Ce^{-x})^{-2}(-Ce^{-x}) \quad (\text{Kjerneregul med } u = 1 + Ce^{-x})$$

$$y' = \frac{Ce^{-x}}{(1 + Ce^{-x})^2}$$

$$VS = y' = \frac{Ce^{-x}}{(1 + Ce^{-x})^2}$$

$$HS = \frac{1}{1 + Ce^{-x}} - \left(\frac{1}{1 + Ce^{-x}}\right)^2 = \frac{1 + Ce^{-x} - 1}{(1 + Ce^{-x})^2} = \frac{Ce^{-x}}{(1 + Ce^{-x})^2}$$

$HS = VS$, så $y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}}$ er generell løsning.

Kunne, som sagt, også ha løst ligningen:

Ulineær, så vi må separere:

$y \neq 0, y \neq 1$:

$$\frac{y'}{y - y^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y'}{y(1 - y)} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y}\right)y' = 1 \quad (\text{Delbrøkkoppspalting})$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y}\right)y' dx = \int 1 dx \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y}\right) dy = \int 1 dx \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| - \ln|1 - y| = x + C_1 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{1 - y}\right| = x + C_1 \Leftrightarrow \frac{y}{1 - y} = C_2 e^x \Leftrightarrow$$

$$y = C_2 e^x - y C_2 e^x \Leftrightarrow y + y C_2 e^x = C_2 e^x \Leftrightarrow y(1 + C_2 e^x) = C_2 e^x \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{C_2 e^x}{1 + C_2 e^x} = \frac{1}{\frac{1}{C_2} e^{-x} + 1} = \frac{1}{1 + Ce^{-x}} \quad \text{QED}$$

$y = 0$ og $y = 1$ er også løsninger. $y = 1$ tilsvarer $C = 0$.

Så egentlig er den generelle løsningen $y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}} \vee y = 0$, så oppgaveteksten er derfor ikke helt korrekt.

Initialbetingelsen $y(0) = \frac{1}{4}$ gir: $\frac{1}{1 + Ce^0} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow C + 1 = 4 \Leftrightarrow C = 3$

Spesiell løsning: $y = \frac{1}{1 + 3e^{-x}}$

Oppgave 3

En plastflaske tømmeres for vann gjennom et hull i bunnen.

Det kan vises at høyden på vannstanden inne i flasken, $h(t)$, er gitt ved differensialligningen

$$h' = -0.0108\sqrt{h}, \quad \text{der } h(t) \text{ måles i meter og } t \text{ i sekunder.}$$

a) Vis at $h(t) = (C - 0.0054t)^2$ er en generell løsning av differensialligningen.

b) Bestem den spesielle løsningen når $h(0) = 0.20$ meter.

a) Kan vise ved *innsetting*:

$$\begin{aligned} \text{Kjernerregel: } h(t) &= (C - 0.0054t)^2 = u^2, & u &= C - 0.0054t \\ h'(t) &= 2(C - 0.0054t)(-0.0054) = -0.0108(C - 0.0054t) \end{aligned}$$

$$VS = h'(t) = 0.0108(0.0054t - C)$$

$$HS = -0.0108\sqrt{h(t)} = -0.0108\sqrt{(C - 0.0054t)^2} = -0.0108(C - 0.0054t)$$

): $VS = HS$, så $h(t) = (C - 0.0054t)^2$ er løsning av differensialligningen.

(Egentlig feil å si "generell" i oppgaven, da $h(t) = 0$ også er en løsning!)

Kan også *løse* ligningen istedenfor å vise med innsetting:

Separabel:

$h \neq 0$:

$$\frac{h'}{\sqrt{h}} = -0.0108 \Leftrightarrow h^{-\frac{1}{2}}h' = -0.0108 \Leftrightarrow \int h^{-\frac{1}{2}}h' dt = -\int 0.0108 dt \Leftrightarrow$$

$$\int h^{-\frac{1}{2}} dh = -\int 0.0108 dt \Leftrightarrow \frac{h^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -0.0108t + C_1 \Leftrightarrow$$

$$2h^{\frac{1}{2}} = C_1 - 0.0108t \Leftrightarrow h^{\frac{1}{2}} = C - 0.0054t \Rightarrow h = (C - 0.0054t)^2$$

$h = 0$ er også løsning (vises ved innsetting), så den generelle løsningen er egentlig:

$$h(t) = 0 \vee h(t) = (C - 0.0054t)^2$$

b) Initialbetingelsen $h(0) = 0.20$ gir: $0.2 = C^2 \Leftrightarrow C = \pm\sqrt{0.2} \approx \pm 0.45$

(Forkaster negativ C , da dette ikke er aktuelt i dette praktiske tilfellet.

$h(t)$ ville da stige for positive t ! Matematikken dekker både den virtuelle og virkelige verden og vet ikke at vann ikke renner oppover og inn i flasken, så vi må tilpasse våre matematiske modeller til virkeligheten.)

Spesiell løsning: $h(t) = (0.45 - 0.0054t)^2$

Oppgave 4

En kuleflate α har ligningen $x^2 - 6x + y^2 + z^2 = 0$.

a) Bestem sentrum S og radius R i kuleflaten.

b) En rett linje har parameterfremstillingen $l : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{array} \right\}$

Finn skjæringspunktene A og B mellom linjen l og kuleflaten α .

c) Finn ligningene for planene som tangerer kuleflaten i punktene A og B .

d) Finn radien i skjærings sirkelen mellom kuleflaten og et plan som har avstanden $a = 1$ fra sentrum S i kuleflaten.

a) Lager fulle kvadrater:

$$x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + z^2 = +3^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 3^2$$

): Sentrum: $S = (3, 0, 0)$, Radius: $R = 3$

b) På l og α samtidig gir: $((3+t)-3)^2 + (2t)^2 + (2t)^2 = 3^2 \Leftrightarrow 9t^2 = 3^2 \Leftrightarrow t = \pm 1$

$t = 1$ gir: $A = (3+1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (4, 2, 2)$

$t = -1$ gir: $B = (3-1, 2(-1), 2(-1)) = (2, -2, -2)$

c) $\vec{SA} = [1, 2, 2]$, $\vec{SB} = [-1, -2, -2]$

Vi ser at $\vec{SA} = -\vec{SB}$, så \vec{SA} og \vec{SB} er parallelle.

AB er derfor diameter i kuleflaten og går gjennom sentrum S !

De to planene er derfor parallelle og kan bruke samme normalvektor,

velger her $\vec{n} = \vec{SA} = [1, 2, 2]$

Plan β gjennom A gitt av $\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$, der $P = (x, y, z)$ i β :

$$[x-4, y-2, z-2] \cdot [1, 2, 2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 2y + 2z - 12 = 0$$

Plan γ gjennom B gitt av $\vec{BP} \cdot \vec{n} = 0$, der $P = (x, y, z)$ i γ :

$$[x-2, y+2, z+2] \cdot [1, 2, 2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 2y + 2z + 6 = 0$$

d) En figur viser at radien r i skjæringssirkelen er gitt av:

$$r = \sqrt{R^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

(Glemte å spørre om sentrum T i skjæringssirkelen.

Den kunne vi funnet slik:

$$\vec{OT} = \vec{OS} + a \cdot \vec{e} = \vec{OS} + a \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} = [3, 0, 0] + 1 \cdot \frac{1}{3} [1, 2, 2] = [\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$$

$$): T = (\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

Oppgave 5

Byen Honolulu på Hawaii ligger på 21.3° nordlig bredde og 158.9° vestlig lengde.

Byen Kabul i Afghanistan ligger på 34.5° nordlig bredde og 69.1° østlig lengde.

Finn korteste avstand (langs jordens overflate) mellom Hawaii og Kabul.

Vi bruker denne parameterfremstillingen for jordoverflaten:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R \cdot \cos u \cdot \cos v \\ y = R \cdot \cos u \cdot \sin v \\ z = R \cdot \sin u \end{array} \right\}, \quad \text{der } R = 6400 \text{ km.}$$

Koordinater til Honolulu:

$$x = 6400 \cdot \cos(21.3^\circ) \cdot \cos(-158.9^\circ) = -5563$$

$$y = 6400 \cdot \cos(21.3^\circ) \cdot \sin(-158.9^\circ) = -2147$$

$$z = 6400 \cdot \sin(21.3^\circ) = 2325$$

Som vektor fra Origo: $\vec{OH} = [-5563, -2147, 2325]$

Koordinater til Kabul:

$$x = 6400 \cdot \cos(34.5^\circ) \cdot \cos(69.1^\circ) = 1882$$

$$y = 6400 \cdot \cos(34.5^\circ) \cdot \sin(69.1^\circ) = 4927$$

$$z = 6400 \cdot \sin(34.5^\circ) = 3625$$

Som vektor fra Origo: $\vec{OK} = [1882, 4927, 3625]$

Vinkel mellom stedsvektorene gitt av:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{OH} \cdot \vec{OK}}{|\vec{OH}| |\vec{OK}|} = \frac{\vec{OH} \cdot \vec{OK}}{R^2} = \frac{[-5563, -2147, 2325] \cdot [1882, 4927, 3625]}{6400^2} = -0.30810$$

$$\alpha = 1.88 \text{ [rad]}$$

Avstanden Honolulu - Kabul langs storsirkel:

$$b = \alpha \cdot R = 1.88 \cdot 6400 \approx 12000 \text{ [km]}$$