R2 - 6.1 - 6.5 Differensialligninger

11.04.13

Løsningsskisser

Oppgave I

Finn generelle løsninger av differensialligningene:
a) $y' + x = \sin x$

b) $y' - y = 0$

c) $2y' + y = 0$

d) $y' = x - yx$

e) $xy' + y = x$

f) $xy' + 3y = x$

g) $y' + \frac{x}{y} = 0$

a) Eksakt ligning: $y' = \sin x - x$
$y = \int(\sin x - x)dx = -\cos x - \frac{1}{2}x^2 + C$

b) Både separabel og lineær, kan velge å separere eller bruke integrerende faktor.
Separerer: $y' = y$
$y \neq 0$:
$\int \frac{y'}{y}dx = \int dx \Leftarrow \int \frac{1}{y}dy = \int dx \Leftrightarrow \ln|y| = x + C_1 \Leftrightarrow |y| = e^{x+C_1}$
$y = Ce^x$
($y = 0$ er inkludert i tilfellet $C = 0$.)

c) $y \neq 0$:
$2\frac{y'}{y} = -1$
$\int \frac{y'}{y}dx = -\frac{1}{2}\int dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{2}\int dx \Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}x + C_1$
$|y| = e^{-\frac{x}{2}+C_1}$
$y = Ce^{-\frac{x}{2}}$ ($y = 0$ er inkludert i tilfellet $C = 0$.)

d) $y' = x(1 - y)$
$y \neq 1$:
$\frac{y'}{1-y} = x \Leftrightarrow \int \frac{1}{1-y}dy = \int x dx \Leftrightarrow -\ln|1 - y| = \frac{x^2}{2} + C_1$
$|1 - y| = e^{-\frac{x^2}{2}-C_1} \Leftrightarrow 1 - y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$
$y = 1 - Ce^{-\frac{x^2}{2}}$
($y = 1$ er inkludert i tilfellet $C = 0$.)

e) $xy' + y = x$
Ikke separabel, men lineær, så vi kan bruke integrerende faktor på $y' + \frac{1}{x}y = 1$,
men her ser vi direkte:

$(xy)' = x \Leftrightarrow xy = \int x dx \Leftrightarrow xy = \frac{x^2}{2} + C$

$y = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

f) $xy' + 3y = x$
Ikke separabel, men lineær: $y' + \frac{3}{x}y = 1$,
$IF = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = (e^{\ln x})^3 = x^3$

$x^3y' + 3x^2y = x^3 \Leftrightarrow (x^3y)' = x^3 \Leftrightarrow x^3y = \int x^3 dx$
$x^3y = \frac{x^4}{4} + C$
$y = \frac{x}{4} + \frac{C}{x^3}$

g) $y' + \frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow yy' = -x \Leftrightarrow \int y dy = -\int x dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_1$
$x^2 + y^2 = 2C_1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2 \qquad (R = \sqrt{2C_1})$

Oppgave II

Vi har gitt differensialligningen $y' = -0.011\sqrt{y}$.
a) Hvilket stigningstall har integralkurven gjennom punktet $(0, 0.1)$ i dette punktet?
b) Finn den generelle løsningen til differensialligningen.

c) Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsen $y(0) = 0.15$.

d) y er høyden på vannet i en tank når vannet renner ut gjennom et hull i bunnen av tanken og $y(0)$ er høyden i meter. Hvor mange sekunder tar det før tanken er tom, hvis den uavhengige variabelen er tiden i sekunder?

a) Stigningstall i $(0, 0.1)$: $y' = -0.011\sqrt{0.1} \approx -0.0035$

b) Separabel:
$y \neq 0$:

$y^{-\frac{1}{2}}y' = -0.011 \Leftrightarrow \int y^{-\frac{1}{2}} dy = -0.011 \int dx$

$\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -0.011x + C_1 \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = C_1 - 0.011x$

$\sqrt{y} = C - 0.0055x$

$y = (C - 0.0055x)^2$

$y = 0$ er også løsning, og ikke inkludert i den første løsningen.

): $\quad y = (C - 0.0055x)^2 \vee y = 0 \qquad$ (Generell løsning.)

c) $y(0) = 0.15 \Rightarrow 0.15 = (C - 0)^2 \Leftrightarrow C = \pm\sqrt{0.15} \approx \pm 0.39$

$y = (\pm 0.39 - 0.0055x)^2 \qquad$ (Spesiell løsning.)

d)

Her får vi vite hvilket praktisk tilfelle dette dekker, og da ser vi at løsningen $y = 0$ ikke kan brukes og at tilfellet $C = -0.39$ ikke kan brukes.

Tom tank når $y = 0$: $(0.39 - 0.0055x)^2 = 0$
Det tar: $x = \frac{0.39}{0.0055} \approx 71$ [sekunder].

Oppgave III

En innsjø inneholder 5000000 m^3 vann. Innsjøen er forurenset med 5 tonn av et giftig stoff sluppet ut av en fabrikk som myndighetene stengte ved tidspunktet $t = 0$ [døgn].
Ut fra innsjøen går det en elv der det passerer 1500 m^3 vann hvert døgn, tilsvarende for elven inn til innsjøen.
a) Forklar at giftmengden y [tonn] i innsjøen er gitt ved differensialligningen $y' = -0.0003y$.

b) Løs differensialligningen

c) Finn ut når giftmengden i innsjøen har blitt 1 tonn.

a) Endringshastighet [tonn/døgn] = Tilførsel[tonn/døgn] - Ut [tonn/døgn]
Derivert = 0 - konsentrasjon • vannføring
$y' = 0 - \frac{y}{V}g$
$y' = -\frac{y}{5000000}1500$
$y' = -0.0003y$

b) $y' = -ky$
$y \neq 0$: $\int \frac{y'}{y}dt = -\int kdt \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int kdt \Leftrightarrow \ln|y| = -kt + C_1$

$|y| = e^{-kt+C_1} \Leftrightarrow y = Ce^{-kt}$ (der $y = 0$ er inkludert i tilfellet $C = 0$.)

Generell løsning: $y = Ce^{-0.0003t}$

Initialbetingelse: $y(0) = 5$ [tonn]
Gir: $5 = C$

Spesiell løsning: $y = 5e^{-0.0003t}$

c) Giftmengden er 1 tonn når: $1 = 5e^{-0.0003t} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = e^{-0.0003t} \Leftrightarrow$
$\ln\frac{1}{5} = -0.0003t \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1 - \ln 5}{-0.0003} = \frac{\ln 5}{0.0003} \approx 5400$ [døgn]
): Etter ca. 15 år

Oppgave IV

Den logistiske differensialligningen $y' = ky(B - y)$ har som kjent løsningen $y = \frac{B}{1+Ce^{-kBt}}$, en løsning vi kan finne ved å separere ligningen og bruke delbrøksoppspaltning.
Vi kan unngå delbrøksoppspaltning ved å gjøre et variabelskifte fra y til $u = \frac{1}{y} = y^{-1}$.

a) Vis at $u' = -u^2y'$. (Bruk kjerneregelen med y som kjerne.)

b) Vis at dette variabelskiftet gir differensialligningen $u' = k(1 - Bu)$.

c) Løs denne ligningen som separabel differensialligning og vis at løsningen blir: $u = \frac{1-Ce^{-kBt}}{B}$.

d) Vis til slutt at dette gir løsningen $y = \frac{B}{1+Ce^{-kBt}}$ når vi skifter tilbake fra u til y.

a) $u = \frac{1}{y} = y^{-1}$

Derivert med y som kjerne med hensyn på t:

$$u' = -y^{-1-1}y' = -y^{-2}y' = -\frac{1}{y^2}y' = -u^2y' \qquad QED$$

b) Vi bytter ut y' med $y' = -\frac{u'}{u^2}$ fra a), og y med $y = \frac{1}{u}$, og får:

$$-\frac{u'}{u^2} = k\frac{1}{u}(B - \frac{1}{u}) \Leftrightarrow u' = -ku(B - \frac{1}{u}) \Leftrightarrow u' = -k(Bu - 1) \Leftrightarrow$$
$$u' = k(1 - Bu) \qquad QED$$

c) Separabel:

$u \neq \frac{1}{B}$ (Eller: $y \neq B$):

$$\frac{u'}{1-Bu} = k \Leftrightarrow \int \frac{1}{1-Bu}du = \int kdt \Leftrightarrow \frac{1}{-B}\ln|1 - Bu| = kt + C_1 \Leftrightarrow$$
$$\ln|1 - Bu| = -kBt + C_2 \Leftrightarrow |1 - Bu| = e^{-kBt+C_2} \Leftrightarrow 1 - Bu = C_3e^{-kBt} \Leftrightarrow$$
$$u = \frac{1-C_3e^{-kBt}}{B} \qquad QED \qquad (u = \frac{1}{B} \text{ inkludert i tilfellet } C_3 = 0.)$$

d) $u = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{1-C_3e^{-kBt}}{B}} = \frac{B}{1-C_3e^{-kBt}} = \frac{B}{1+Ce^{-kBt}} \qquad QED$