R2 - 26.02.2015 - Differensialligninger

Løsningsskisser

Oppgave 1

Løs differensialligningene:

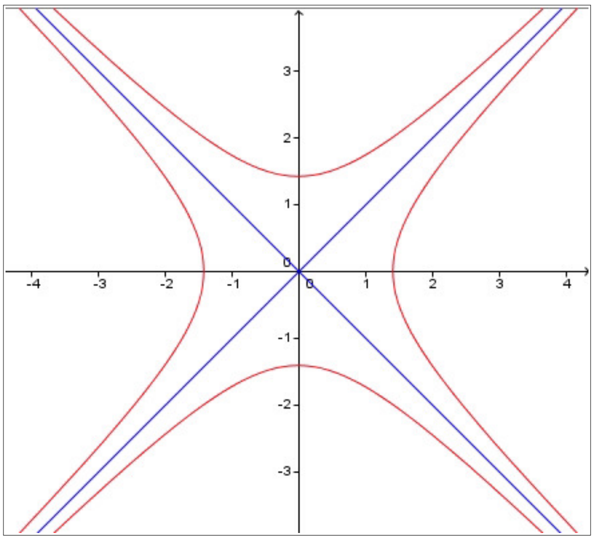
a) $y' - x = e^x$ b) $y' - \frac{x}{y} = 0$

c) $y' = xy + x$ d) $y' + y = x$

a) Eksakt dl: $y' = x + e^x$
Løses direkte med vanlig integrasjon: $y = \frac{x^2}{2} + e^x + C$

b) Ulineær, separabel: $yy' = x, \quad y \neq 0$
Integrasjon og kjerneregel gir: $\int yy'dx = \int xdx \Leftrightarrow$
$\int ydy = \int xdx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + C$ (ligningsform)$\Leftrightarrow$
$y = \pm\sqrt{x^2 + C}$ (funksjonsform)

($y^2 - x^2 = C$ er en hyperbel med skrå asymptoter $y = \pm x$:



(Minner om sirkelligning $x^2 + y^2 = C$!)

c) Lineær og separabel. Separasjon gir: $y' = x(y+1)$
$y \neq -1$ gir:$\int \frac{y'}{y+1}dx = \int xdx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y+1}dy = \int xdx \Leftrightarrow$
$\ln|y+1| = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow |y+1| = e^{\frac{x^2}{2}+C_1} \Leftrightarrow |y+1| = e^{\frac{x^2}{2}}e^{C_1} \Leftrightarrow$
$|y+1| = C_2e^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow y + 1 = Ce^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$

(Tilfellet $y = 1$ er dekket av $C = 0$.)

d) Ikke separabel, så vi *må* bruke integrerende faktor:

$IF = e^{\int 1dx} = e^x$
$y'e^x + ye^x = xe^x \Leftrightarrow (ye^x)' = xe^x \Leftrightarrow ye^x = \int xe^x dx$
Delvis integrasjon: $\int xe^x dx = e^x x - \int e^x 1dx = e^x x - e^x + C$
Ligning: $ye^x = e^x x - e^x + C \Leftrightarrow y = x - 1 + Ce^{-x}$

Oppgave 2

Løs differensialligningene:

a) $xy' + y = \cos x$, med initialbetingelsen: $y(\frac{\pi}{2}) = 2$

b) $yy'x^2 = 1$, med initialbetingelsen: $y(1) = \sqrt{2}$

a) Kan skrive som $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x}$ og bruke integrerende faktor:
$IF = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$
Multiplikasjon gir da:
$xy' + y = \cos x$ *og vi er tilbake der vi startet!*

Så, egentlig burde vi sett at venstre side er klar for produktsetningen *direkte*: (Sparer en del tid på å se slike ting!)

$xy' + y = y'x + y1 = (yx)'$

Uansett, vi får: $(yx)' = \cos x \Leftrightarrow yx = \sin x + C \Leftrightarrow$

$y = \frac{\sin x + C}{x}$ (Generell løsning.)

Initialbetingelse: $y(\frac{\pi}{2}) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1+C}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow C = \pi - 1$

$y = \frac{\sin x + \pi - 1}{x}$ (Spesiell løsning.)

b) Ulineær, så vi separerer:
$yy' = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \int yy'dx = \int x^{-2}dx \Leftrightarrow$
$\frac{y^2}{2} = -x^{-1} + C_1 \Leftrightarrow y^2 = C - \frac{2}{x}$ (Generell løsning på ligningsform)$\Leftrightarrow$
$y = \pm\sqrt{C - \frac{2}{x}}$ (Generell løsning på funksjonsform)

Initialbetingelse: $y(1) = \sqrt{2}$
$\sqrt{2} = \pm\sqrt{C - \frac{2}{1}} \Leftrightarrow C = 4$ (Negativ løsning umulig!)
$y = \sqrt{4 - \frac{2}{x}}$ (Spesiell løsning.)

OBS: Legg merke til at $y = -\sqrt{4 - \frac{2}{x}}$ må forkastes med denne initialbetingelsen! ($-\sqrt{C - \frac{2}{x}}$ kan *aldri* bli $\sqrt{2}$!)

Oppgave 3

a) Hvilke av differensialligningene i oppgave 1 og 2 er av første orden?

b) Hvilke av differensialligningene i opppgave 1 og 2 er ulineære. (Grad høyere enn 1.)

a) Alle er av første orden. (Første deriverte av y.)

b) Oppgave 1b) ($yy' - x = 0$) og
Oppgave 2 b) ($yy'x^2 = 1$) er ulineære da de inneholder produkt av y-er!
(y^2, $(y')^2$ eller yy' .)

Oppgave 4

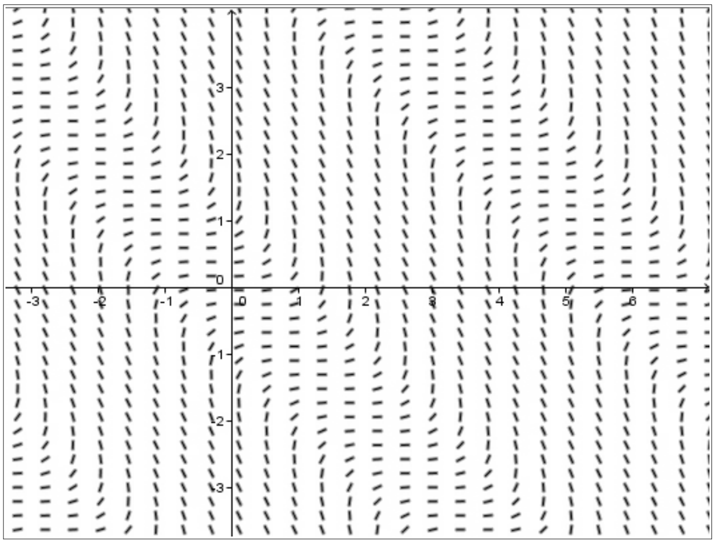
a) Vis at $(\sin(x+y))' = \cos(x+y)(1+y')$.

b) Bruk dette til å løse differensialligningen $y' = \frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)}$.
(Løsningen er ikke en funksjon, så behold løsningen på ligningsform.)

a) Kjerneregel gir: $\sin(x+y) = \sin(u), \quad u = x+y$
$(\sin(x+y))' = \cos(u)(1+y') = \cos(x+y)(1+y') \qquad QED$

b) $y' = \frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\cos(x+y)} - 1 \Leftrightarrow y' + 1 = \frac{1}{\cos(x+y)} \Leftrightarrow$
$\cos(x+y)(1+y') = 1$
Resultatet i a) gir:
$(\sin(x+y))' = 1 \Leftrightarrow \sin(x+y) = x + C$ (Ligningsform.)

Kommentarer:
Vanskelig å løse denne med hensyn på y og få med alle muligheter, da $\sin(x)$ bare har definert invers funksjon $\sin^{-1}(x)$ for x begrenset til intervallet $[-1, 1]$.
Kan finne retningsdiagram i GeoGebra med:
Retningsdiagram[(1-cos(x+y))/cos(x+y)]

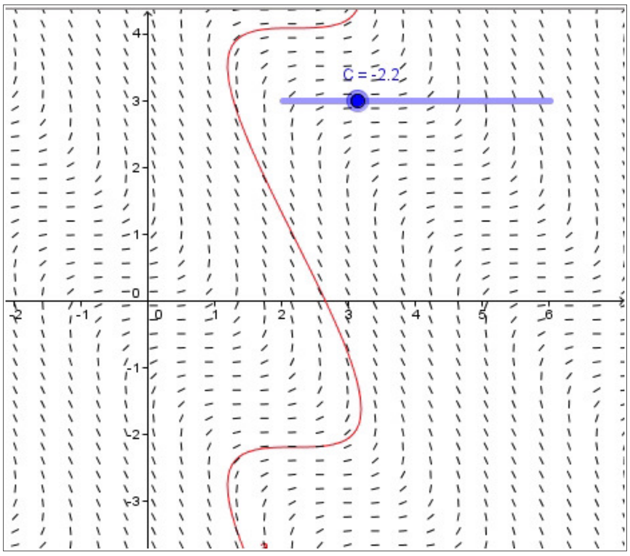


Litt verre å grafe, men kan være lurt å kjenne til et triks (:-))som går ut på å bruke parameterfremstilling:
For å få både x og y ut av sinusfunksjonen, innfører vi parameteren
$t = x + y \quad \Rightarrow \quad x = t - y \qquad I$
og får da:
$\sin t = t - y + C \quad \Rightarrow \quad y = C + t - \sin t \qquad II$
Dette gir igjen parameterfremstillingen:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = t - y \\ y = C + t - \sin t \end{array} \right\} \text{ som igjen gir: } \left\{ \begin{array}{c} x = t - (C + t - \sin t) \\ y = C + t - \sin t \end{array} \right\}$$

Kommandoen:

Kurve[t-(C+t-sin(t)), C+t-sin(t), t, -10, 10] gir da:



Oppgave 5

Vektløfteren Bjørn Råsterk tok sikte på å få medalje i et VM ved hjelp av kosttilskuddet Super Testo Steron, som ikke overraskende stod på dopinglisten. Anbefalt dose i døgnet var 1 gram. I Bruksanvisningen Råsterk fikk av en østeuropeisk vektløfter, sto det at for hvert gram inntatt Super Testo Steron blir det lagret 2 mg av et sporstoff S i blodet.
Uheldigvis for Råsterk og likesinnede kunne sporstoffet S oppdages ved dopingkontroller.
Kroppen bryter ned 10% av dette sporstoffet i løpet av et døgn.
Råsterk brukte anbefalt dose de siste 30 dagene før VM.

a) Vis at dette gir en modell beskrevet av differensialligningen
$y' + 0.1y = 2$ [mg/døgn], $\quad t \in [0, \rightarrow\rangle$ [døgn]

b) Løs differensialligningen.

c) Finn ut om Råsterk ble tatt i dopingkontrollen, hvis dopingkontrollen ga positivt utslag på alle med mer enn 15 mg sporstoff i blodet.

a) Skjematisk:

Endring	=	Inn	-	Ut
Endringshastighet sporstoff i blod	=	Daglig dose	-	Daglig nedbrytning
y' [mg/d]	=	2 [mg/d]	$-$	0.1 [1/d] y [mg]

Så vi har differensialligningen:
$y' + 0.1y = 2$, der y er antall mg sporstoff i blodet.

(Forutsetningen for modellen er at vi regner som om inntaket skjer helt kontinuerlig gjennom døgnet. I virkeligheten ville det skje med en pille en gang i døgnet, så slik sett vil en modell med følge/rekke passe bedre, på den annen side er daglig nedbrytning kontinuerlig gjennom døgnet, så både en følge/rekke eller differensialligning er mulige måter å lage modeller på.)

b) Lineær og kan løses både med integrerende faktor og som separabel differensialligning:

$y \neq 20$ gir:

$\frac{y'}{2-0.1y} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{y'}{2-0.1y} dt = \int 1 dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{2-0.1y} dy = \int 1 dt \Leftrightarrow$

$\frac{\ln|2-0.1y|}{-0.1} = t + C_1 \Leftrightarrow \ln|2-0.1y| = -0.1t + C_2 \Leftrightarrow$

$|2-0.1y| = e^{-0.1t+C_2} \Leftrightarrow |2-0.1y| = e^{-0.1t}e^{C_2} \Leftrightarrow$

$|2-0.1y| = C_3e^{-0.1t} \Leftrightarrow 2-0.1y = C_4e^{-0.1t} \Leftrightarrow$

$0.1y = 2 - C_4e^{-0.1t} \Leftrightarrow y = 20 - Ce^{-0.1t}$ (Generell løsning.)

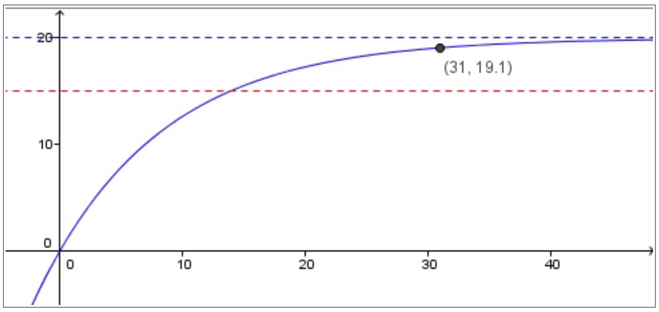
($y = 20$ er dekket av $C = 0$.)

Initialbetingelse: $y(0) = 0$ [mg]

(Naturlig å regne med at Råsterk ikke er dopet i utgangspunktet.)

$0 = 20 - Ce^0 \Leftrightarrow C = 20$

$y = 20 - 20e^{-0.1t}$ (Spesiell løsning.)



c)

Sporstoff i blodet dag 31: $y(31) \approx 19$ [mg]

): Råsterk ble tatt i dopingkontrollen da $y(31) > 15$ (grenseverdien)

Oppgave 6

Det ble satt ut kaniner på en øde øy. Antall kaniner var etter t måneder gitt av den logistiske modellen $K(t) = \frac{B}{1+ae^{-kBt}}$ [kaniner], $D_K = [0, \rightarrow\rangle$ [mnd.].

a) Vis at $K'(t) = akB^2 \frac{e^{-Bkt}}{(ae^{-Bkt}+1)^2}$

b) Vis ved innsetting at $K(t)$ er løsning av den logistiske differensialligningen

$$K' = k\,K\,(B-K)$$

Utviklingen av bestanden går frem av tabellen:

t :[mnd]	6	12	18
$K(t)$:[kaniner]	330	460	490

c) Bruk opplysningene til å finne B, a og k.

d) Hvor mange kaniner ble satt ut i utgangspunktet?

e) Hvor mange kaniner gir denne modellen i det lange løp?

f) Hva er maksimal veksthastighet?

a) Bruker kjerneregel:

$$K(t) = B(1 + ae^{-kBt})^{-1} = Bu^{-1}, \qquad u = 1 + ae^{-kBt}$$

$$K'(t) = -Bu^{-2} \cdot (0 + ae^{-kBt})(-kB) = akB^2(1 + ae^{-kBt})^{-2}e^{-kBt} = akB^2 \frac{e^{-kBt}}{(1+ae^{-kBt})^2} \qquad QED$$

b) $VS = K'(t) = akB^2 \frac{e^{-kBt}}{(1+ae^{-kBt})^2}$ (Fra a).)

$$HS = kK(t)(B - K(t)) = k\frac{B}{1+ae^{-kBt}}(B - \frac{B}{1+ae^{-kBt}}) = k\frac{B^2}{1+ae^{-kBt}}(1 - \frac{1}{1+ae^{-kBt}}) = k\frac{B^2}{1+ae^{-kBt}}\frac{1+ae^{-kBt}-1}{1+ae^{-kBt}} = k\frac{B^2}{1+ae^{-kBt}}\frac{ae^{-kBt}}{1+ae^{-kBt}} = akB^2\frac{e^{-kBt}}{(1+ae^{-kBt})^2} \qquad QED$$

Resten av oppgaven dreier seg mer om kapittel 4, men jeg tok den med da den gir oss litt mer informasjon om den logistiske funksjonen.

c) Regresjon med TI lommeregner:
Listene: **L1={6,12,18} og L2={330,460,490}**
og kommandoen: **STAT,CALC, B:Logistic L1,L2**
gir oss modellen:

$$K(t) = \frac{496}{1+3.24e^{-0.310t}}$$

I GeoGebra: **RegLogist[{(6,330), (12,460), (18,490)}]**
gir samme resultat!

d) Kaniner i utgangspunktet, $t = 0$:

$$K(0) = \frac{496}{1+3.24e^0} \approx 117$$

e) Kaniner i det lange løp, $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{496}{1+3.24e^{-0.310t}} = \frac{496}{1+0} = 496$$

(Bærekraften $B = 496$.)

f) Maksimal veksthastighet har vi i vendepunktet, og vi vet at det er i symmetripunktet der $K(t) = \frac{B}{2}$.
Trikset her er å bruke den opprinnelige differensialligningen:

Maks. veksthastighet:

$$K' = k\frac{B}{2}(B - \frac{B}{2}) = k\frac{B}{2}\frac{B}{2} = \frac{kB^2}{4} = \frac{\frac{0.310}{496}496^2}{4} \approx 38 \text{ [kaniner/mnd]}$$

Se også en annen fil-lenke der jeg som en illustrasjon viser hvordan alle oppgavene kunne vært gjort med CAS!
