

## R2 - 26.03.2015 - Differensialligninger

### Oppgave 1

Løs differensialligningene

a)  $y' = x\sqrt{y}$

b)  $y' + 3y = x$

c)  $y'' - 8y' + 7y = 0$

### Oppgave 2

En bil med masse  $m = 1500$  kg kjører med konstant fart  $v_1$  idet clutchen trykkes inn og bilen triller videre uten motorkraft.

Vi regner at bare friksjonskrefter og luftmotstand, proporsjonale med farten i andre potens,  $R = kv^2$ , virker på bilen når den triller videre.

a) Vis at vi har differensialligningen  $mv' + kv^2 = 0$  som modell for bilens fart  $v$  [m/s] som funksjon av tiden  $t$  [s].

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen.

c) Finn den spesielle løsningen ved hjelp av initialbetingelsen  $v(0) = v_1$ .

d) Bruk resultatet i c) til å utlede den såkalte "coasting"-formelen:

$$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = \frac{k}{m} \Delta t, \quad \text{der } \Delta t \text{ er tiden bilen bruker på}$$

å trille fra startfart  $v_1$  til slutfart  $v_2$ .

e) Dette kan brukes til å finne faktoren  $k$  ved å ta tiden  $\Delta t$  bilen bruker på å sakne farten fra  $v_1$  til  $v_2$  med frikoblet motor.

Finn  $k$  hvis  $v_1 = 60$  [km/t],  $v_2 = 40$  [km/t] og  $\Delta t = 20$  [s]

f) Hvor langt har bilen beveget seg på de 20 sekundene i e)?

### Oppgave 3

En gjenstand med masse  $m$  henger i en fjær som er festet i taket.

Fjærkonstanten er  $k$  og dempningskoeffisienten er  $d$ .

a) Bruk Newtons andre lov og forklar hvordan du kommer frem til en differensialligning der  $y$  er utslaget som funksjon av tiden  $t$ .

b) Skriv opp betingelsene for de fire svingebevegelesene harmonisk svingning, dempet svingning, kritisk dempet svingning og overkritisk dempet svingning.

### Oppgave 4

Når en bil kjører over en hump i veien, er det ønskelig at støtdemperne sørger for at den vertikale svingebevegelsen som oppstår blir dempet mest mulig. Hvis massen til bilen er  $m$ , den samlede fjærkonstanten til støtdemperne

$k$  og dempningskonstanten i støtdemperne er  $q$ , vil den vertikale posisjonen  $y = f(t)$  til bilen være gitt ved en løsning av differensialligningen

$$my'' + qy' + ky = 0$$

a) En bil med massen  $m = 1000$  kg kjører på en horisontal vei. Den samlede fjærkonstanten for de fire støtdemperne setter vi til  $k = 1.0 \cdot 10^5$  N/m, og dempningskonstanten til  $q = 2.0 \cdot 10^4$  Ns/m. Bilen kjører over en hump. Finn det generelle uttrykket for posisjonen  $y$  til bilen  $t$  sekunder etter passering av toppen på humpen, når initialbetingelsene er  $y(0) = 0.3$  [m] og  $y'(0) = 0$  [m/s]

b) Hva slags type svingning er dette? Bør støtdemperne skiftes?

En gammel bil med samme masse og samme samlede fjærkonstant har dempningskonstant  $q = 1.0 \cdot 10^4$ .

c) Hva slags type svingning får denne bilen etter passering av en tilsvarende hump? Bør støtdemperne skiftes?

(Gode støtdempere bør ikke passere likevektspunktet mer enn en gang etter en hump og stabilisere seg på likevektspunktet etter ca. ett sekund.)

### Oppgave 5

Forklar hvorfor  $(y'y)' = y''y + (y')^2$ .

Bruk dette til å løse differensialligningen  $y''y + (y')^2 = x$