# R2 - 26.03.2015 - Differensialligninger

## *Løsningsskisser*

### Oppgave 1

Løs differensialligningene

a) $y' = x\sqrt{y}$    b) $y' + 3y = x$

c) $y'' - 8y' + 7y = 0$

1 a)
Separabel: $y^{-\frac{1}{2}}y' = x \Leftrightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int xdx$

$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + C \Rightarrow y = (C + \frac{x^2}{4})^2$

Da ligningen er ulineær, bør vi også se etter trivielle løsninger:
$y = 0$ er også løsning!

): $y = (C + \frac{x^2}{4})^2 \vee y = 0$

1 b)
Lineær, ikke separabel: $IF = e^{\int 3dx} = e^{3x}$
Vi får: $(ye^{3x})' = xe^{3x}$
Delvis integrasjon: $ye^{3x} = \int xe^{3x}dx = x\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$

): $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + Ce^{-3x}$

1 c)
Karakteristisk ligning: $r^2 - 8r + 7 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \vee r = 7$

): $y = Ce^x + De^{7x}$

### Oppgave 2

En bil med masse $m = 1500$ kg kjører med konstant fart $v_1$ idet clutchen trykkes inn og bilen triller videre uten motorkraft.
Vi regner at bare friksjonskrefter og luftmotstand, proporsjonale med farten i andre potens, $R = kv^2$, virker på bilen når den triller videre.
a) Vis at vi har differensialligningen $mv' + kv^2 = 0$ som modell for bilens fart $v$ [m/s] som funksjon av tiden $t$ [s].

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen.

c) Finn den spesielle løsningen ved hjelp av initialbetingelsen $v(0) = v_1$.

d) Bruk resultatet i c) til å utlede den såkalte "coasting"-formelen:

$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = \frac{k}{m}\Delta t,$ der $\Delta t$ er tiden bilen bruker på å trille fra startfart $v_1$ til sluttfart $v_2$.

e) Dette kan brukes til å finne faktoren $k$ ved å ta tiden $\Delta t$ bilen bruker på å sakne farten fra $v_1$ til $v_2$ med frikoblet motor.
Finn $k$ hvis $v_1 = 60$ [km/t], $v_2 = 40$ [km/t] og $\Delta t = 20$ [s]

f) Hvor langt har bilen beveget seg på de 20 sekundene i e)?

a)
Newton II: $\sum F = ma$ gir: $-kv^2 = mv' \Leftrightarrow mv' + kv^2 = 0$

b)
Separerer: $v^{-2}v' = -\frac{k}{m}$ Integrerer: $\int v^{-2}dv = -\frac{k}{m}\int dt$

$$-v^{-1} = -\frac{k}{m}t + C_1 \Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{kt}{m} + C_2 \Leftrightarrow v = \frac{1}{\frac{kt}{m}+C_2} \Leftrightarrow$$

$v(t) = \frac{m}{kt+C}$ (Generell løsning.)

c)
Initialbetingelse: $v(0) = v_1 \Rightarrow \frac{m}{C} = v_1 \Leftrightarrow C = \frac{m}{v_1}$

$v(t) = \frac{m}{kt+\frac{m}{v_1}} = \frac{mv_1}{v_1kt+m}$ (Spesiell løsning.)

d)

$$v(\Delta t) = v_2 \Rightarrow \frac{mv_1}{v_1k\Delta t+m} = v_2 \Leftrightarrow mv_1 = v_1v_2k\Delta t + mv_2 \Leftrightarrow$$

$$v_1v_2k\Delta t = m(v_1 - v_2) \Leftrightarrow \frac{k}{m}\Delta t = \frac{v_1-v_2}{v_1v_2} \Leftrightarrow \frac{k}{m}\Delta t = \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \qquad QED$$

e)

$k = \frac{m}{\Delta t}\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = \frac{1500}{20}\left(\frac{1}{\frac{40}{3.6}} - \frac{1}{\frac{60}{3.6}}\right) = 2.25$ (Obs: [m/s]=$\frac{\text{[km/t]}}{3.6}$ )

f)
Veilengde: $s'(t) = v(t) \Rightarrow s = \int_0^{20} v(t)dt$

$$v(t) = \frac{mv_1}{v_1kt+m} = \frac{1500\cdot\frac{60}{3.6}}{\frac{60}{3.6}\cdot 2.25t+1500} = \frac{1500\cdot 60}{60\cdot 2.25t+1500\cdot 3.6} = \frac{2000}{3t+120}$$

$$s = \int_0^{20} \frac{2000}{3t+120}dt =_0^{20} \left[\frac{2000}{3}\ln|3t+120|\right] = \frac{2000}{3}(\ln 180 - \ln 120) =$$

$$\frac{2000}{3}\ln\frac{180}{120} = \frac{2000}{3}\ln\frac{3}{2} \approx 270 \text{ [m]}$$

## Oppgave 3

En gjenstand med masse $m$ henger i en fjær som er festet i taket.
Fjærkonstanten er $k$ og dempningskoeffisienten er $d$.

a) Bruk Newtons andre lov og forklar hvordan du kommer frem til en differensialligning der $y$ er utslaget som funksjon av tiden $t$.
b) Skriv opp betingelsene for de fire svingebevegelsene harmonisk svingning, dempet svingning, kritisk dempet svingning og overkritisk dempet svingning.

a)

Tegn figur. Se side 303-304 i lærebok!

Newton II: $\sum F = ma$ gir:

I likevektsposisjon: $mg - ks_0 = 0$

Med utslag $y$:

$$mg - k(y + s_0) - dy' = my'' \Leftrightarrow$$
$$my'' + dy' + ky + (ks_0 - mg) = 0 \Leftrightarrow$$
$$my'' + dy' + ky = 0$$

b)
Se side 305-306 i lærebok.

Karakteristisk ligning gir:

$$mr^2 + dr + k = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-d}{2m} \pm \frac{\sqrt{d^2-4mk}}{2m}$$

I Harmonisk svingning (Udempet svingning):
Demping lik 0: $d = 0$: $r = \frac{-d}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\, i$

$$y = C\sin(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t) + D\cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t))$$

Svingetid: $T_H = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

II Dempet svingning: $d^2 < 4mk$ : $r = \frac{-d}{2m} \pm \frac{\sqrt{4mk-d^2}}{2m} i = -\alpha \pm \beta i$

$$y = e^{-\alpha t}(C\sin(\beta t) + D\cos(\beta t))$$

Svingetid: $T > T_H$, da uttrykket $T = 2\pi\frac{2m}{\sqrt{4mk-d^2}}$ er større enn

$$\frac{2m}{\sqrt{4mk}} = \sqrt{\frac{4m^2}{4mk}} = \sqrt{\frac{m}{k}} = T_H$$

III Kritisk dempning: $d^2 = 4mk$ : $r = \frac{-d}{2m}$ (dobbelrot)

$$y = (C + Dt)e^{\frac{-d}{2m}t}$$

IV Overkritisk dempning: $d^2 > 4km$ : $r = r_1 \vee r = r_2$

$$y = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t}$$

**Oppgave 4**

Når en bil kjører over en hump i veien, er det ønskelig at støtdemperne sørger for at den vertikale svingebevegelsen som oppstår blir dempet mest mulig. Hvis massen til bilen er $m$, den samlede fjærkonstanten til støtdemperne $k$ og dempningskonstanten i støtdemperne er $q$, vil den vertikale posisjonen $y = f(t)$ til bilen være gitt ved en løsning av differensialligningen

$$my'' + qy' + ky = 0$$

a) En bil med massen $m = 1000$ kg kjører på en horisontal vei.
Den samlede fjærkonstanten for de fire støtdemperne setter vi til $k = 1.0 \cdot 10^5$ N/m, og dempningskonstanten til $q = 2.0 \cdot 10^4$ Ns/m.
Bilen kjører over en hump.

Finn det generelle uttrykket for posisjonen $y$ til bilen $t$ sekunder etter passering av toppen på humpen, når initialbetingelsene er $y(0) = 0.3$ [m] og $y'(0) = 0$ [m/s]

b) Hva slags type svingning er dette? Bør støtdemperne skiftes?

En gammel bil med samme masse og samme samlede fjærkonstant har dempningskonstant $q = 1.0 \cdot 10^4$.

c) Hva slags type svingning får denne bilen etter passering av en tilsvarende hump? Bør støtdemperne skiftes?

(Gode støtdempere bør ikke passere likevektspunktet mer enn en gang etter en hump og stabilisere seg på likevektspunktet etter ca. ett sekund.)

a)

$$y'' + \tfrac{d}{m}y' + \tfrac{k}{m}y = 0 \qquad \text{eller} \qquad y'' + 20y' + 100y = 0$$

Karakteristisk ligning: $r^2 + 20r + 100 = 0 \Leftrightarrow r = -10$ (Dobbelrot)

Generell løsning: $y = (C + Dt)e^{-10t}$

Initialbetingelser:

$y(0) = 0.3$ : $\quad 0.3 = (C + 0)1 \Leftrightarrow C = 0.3$

$$y' = De^{-10t} + (C + Dt)(-10)e^{-10t}$$

$y'(0) = 0$ : $\quad 0 = D \cdot 1 + (C + 0)(-10) \cdot 1 \Leftrightarrow D = 10C = 3$

Spesiell løsning: $y = (0.3 + 3t)e^{-10t}$

b) Dette er en kritisk dempet svingning som er akkurat på grensen, men greit nok. (Det viktigste er at den svinger inn i løpet av ett sekund og at den ikke er en dempet svingning, selv om en slik svingning er dempet, vil den krysse likevektspunktet flere ganger!)

c) Karakteristisk ligning: $r^2 + 10r + 100 = 0 \Leftrightarrow r = -5 \pm 5\sqrt{3}\, i$

$$y = e^{-5t}(C\sin(8.66t) + D\cos(8.66t))$$

Dette er en dempet svingning, og den vil svinge lenger enn ett sekund og passere likevektspunktet flere ganger, så denne bør skiftes. (Er direkte farlig å kjøre med slike støtdempere...)

**Oppgave 5**

Forklar hvorfor $(y'y)' = y''y + (y')^2$.
Bruk dette til å løse differensialligningen $y''y + (y')^2 = x$

Produktregel på $y'y$ gir $(y'y)' = y''y + y'y' = y''y + (y')^2 \qquad$ *QED*

Vi har da: $(y'y)' = x$ og integrasjon gir da: $y'y = \frac{x^2}{2} + C_1$

Denne er separabel, så vi integrerer igjen:

$\int y dy = \int (C_1 + \frac{x^2}{2}) dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = C_1 x + \frac{x^3}{6} + D_1 \Leftrightarrow$

$y^2 = D + Cx + \frac{x^3}{3}$ (Ligningsform)

$y = \pm\sqrt{D + Cx + \frac{x^3}{3}}$ (Funksjonsform)