Oppgaver i 6.7 - Flere teknikker (og triks)

Teknikk: Ligninger med potenser av y':

668

a)

$(y')^2 - 6y' + 8 = 0 \Leftrightarrow y' = 4 \vee y' = 2$ (Andregradsligning i y')

$y' = 4 \Leftrightarrow y = 4x + C$

$y' = 2 \Leftrightarrow y = 2x + D$

Generell løsning: $y = 4x + C \vee y = 2x + D$

b)

$(y')^3 - 3(y')^2 - y' + 3 = 0$

$u^3 - 3u^2 - u + 3 = 0$

Standardteknikk fra R1: Teste $\pm 1, \pm 3$ og finne ut at 3 er en rot i tredjegradsligningen. Polynomdividere bort $(u - 3)$ for å få en andregradsligning i u og løse denne.

Her er det så mye tretall at det kan gjøres enklere:

$u^2(u-3) - (u-3) = 0 \Leftrightarrow (u^2 - 1)(u - 3) = 0 \Leftrightarrow u = -1 \vee u = 1 \vee u = 3$

$y' = -1 \Rightarrow y = -x + C$

$y' = 1 \Rightarrow y = x + D$

$y' = 3 \Rightarrow y = 3x + E$

Generell løsning: $y = -x + C \vee y = x + D \vee y = 3x + E$

Teknikk: Reduksjon av orden når y –ledd mangler:

c)

$y'' + 3y' = e^{-x}$

$u' + 3u = e^{-x}, \quad u = y'$

$IF = e^{\int 3dx} = e^{3x}$

$(ue^{3x})' = e^{-x}e^{3x} = e^{2x}$

$ue^{3x} = \int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + D$

$u = y' = \frac{1}{2}e^{-x} + De^{-3x}$

$y = \int(\frac{1}{2}e^{-x} + De^{-3x})dx = -\frac{1}{2}e^{-x} + C_1e^{-3x} + C_2$

669

a), b) og c): Reduksjon av orden med $u = y'$.

d) Ligning i y', løser først mhp. y':

$e^{y'} = x^2 \Leftrightarrow y' = \ln x^2 = 2\ln|x|$

$y = \int 2\ln|x|dx = 2(x\ln|x| - x + D) = 2x\ln|x| - 2x + C = 2\ln x^2 - 2x + C$

670

a)

$\sqrt{y'} = x + 5 \Rightarrow y' = x^2 + 10x + 25, \qquad x + 5 \geq 0, y' \geq 0$

$y = \frac{x^3}{3} + 5x^2 + 25x + C, \qquad x \geq -5$

b)

$\sqrt{y' - 4} = x \Rightarrow y' = x^2 + 4, \qquad y' \geq 4, x \geq 0$

$y = \frac{x^3}{3} + 4x + C, \qquad x \geq 0$

c)

$\sqrt{y' + 7} = 3 - y', \qquad -7 \leq y' \leq 3$

$\Rightarrow y' + 7 = 9 - 6y' + (y')^2 \Leftrightarrow (y')^2 - 7y' + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$y' = 6.7$ (forkastes) $\vee\ y' = 0.298$

$y = 0.298x + C$

671

a) $u = y^2 \Rightarrow u' = 2y \cdot y'$ med kjerneregelen!

b) $e^x(y^2)' = x \Leftrightarrow (y^2) = \int xe^{-x}dx = -e^{-x} - xe^{-x} + C$

$y = \pm\sqrt{C - e^{-x} - xe^{-x}}$

c) $2xyy' + y^2 = 12x^2 \Leftrightarrow xu' + u = 12x^2, \qquad u = y^2$

$(xu)' = 12x^2 \Rightarrow xu = \int 12x^2dx = 4x^3 + C$

$u = y^2 = 4x^2 + \frac{C}{x} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4x^2 + \frac{C}{x}}$

Et eksempel til med denne teknikken:

$$yy' + y^2 = e^x \iff \tfrac{1}{2}u' + u = e^x, \qquad u = y^2$$

$$u' + 2u = 2e^x, \qquad IF = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

$$(ue^{2x})' = 2e^x e^{2x} = 2e^{3x}$$

$$ue^{2x} = 2\int e^{3x}dx = 2\tfrac{1}{3}e^{3x} + C$$

$$u = y^2 = \tfrac{2}{3}e^x + Ce^{-2x} \iff y = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}e^x + Ce^{-2x}}$$

Noe tilsvarende kan gjøres med andreordens ligninger:

(Hvis x mangler i ligningen.)

$$u = (y')^2 \implies u' = 2y' \cdot y'' \qquad \text{med kjerneregel.}$$

Eksempel:

$$y'' = \tfrac{1}{y^3} \qquad \text{Multipliserer med } 2y' \text{ for å få } 2y'y'':$$

$$2y'y'' = \tfrac{2y'}{y^3}$$

$$\int u'dx = \int \tfrac{2y'}{y^3}dx$$

Kjerneregel gir: $\int u'dx = \int \tfrac{2}{y^3}dy \implies u = -y^{-2} + C \iff$

$$(y')^2 = C - \tfrac{1}{y^2} \iff y' = \pm\sqrt{C - \tfrac{1}{y^2}} = \pm\sqrt{\tfrac{Cy^2-1}{y^2}} = \pm\tfrac{\sqrt{Cy^2-1}}{y}$$

Separabel: $\int \tfrac{y}{\sqrt{Cy^2-1}}dy = \pm\int dx \iff \tfrac{\sqrt{Cy^2-1}}{C} = \pm x + D \iff$

$$\sqrt{C_1y^2 + 1} = \pm C_1x + C_2$$

(Generell løsning på ligningsform eller med x som funksjon av y.)