Kapittel 6.7 - Flere teknikker

H-P Ulven 22.04.09

Innhold:

- Innledning
- Ligninger med potenser av y'. (Lærebok 6.7)
- Reduksjon av orden med variabelskiftet $u = y'$. (Lærebok 6.7)
- Innføring av $u = y^2$ og $u' = 2yy'$. (Lærebok oppgave 671)
- Metode som er nevnt i andre læreverk (Sigma):
  - Reduksjon av orden i $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ hvis vi ***kjenner*** en spesiell løsning. (Her har vi ***ikke*** konstante koeffisienter!)
- Andre interessante og morsomme triks:
  - $y' + p(x)y = q(x)y^n$ (Bernoullis differensialligning)
  - Bruk av multiplikasjons- og brøkregelen for derivasjon.
  - Innføring av $u = (y')^2$ og $u' = 2y'y''$ i ulineære andreordens ligninger.
  - Innføring av $v = \frac{y}{x}$ som gir $y' = xv' + v$ i førsteordens ligninger.

Innledning:

De fleste differensialligninger vi har løst hittil har vært ***lineære***, det vil si at de ikke har hatt potenser av $y\prime$ eller y”. (Ligninger med potenser av y kan også være litt brysomme...)
Det kan være verdt å gå litt lenger med dette av flere grunner:

- Det kan kanskje dukke opp varianter av dette til eksamen.
- Kan ofte spare endel regnearbeid da triksene ofte virker bedre enn standardmetodene.
- Kjekt å kunne litt om dette hvis man skal bli matematiker eller ingeniør.
- Utdyper forståelse og eksemplifiserer metoder fra integral-kapitlet. (Variabelskifte mm.)
- Løser ofte oppgaver av typen "Bruk digitale hjelpemidler ..." raskt med papir og blyant.

6.7 Ligninger med potenser av y'

Eller ligninger som må løses mhp. y' før vi går videre.

$(y')^2 - 3x(y') + 2x^2 = 0$ er ulineær og våre metoder hittil takler ikke dette.

Men, det er en annengradsligning i y', så vi har:

$$(y' - x)(y' - 2x) = 0 \Leftrightarrow y' = x \vee y' = 2x$$

som gir oss to løsninger: $\quad y = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \vee y = \int 2x dx = x^2 + D$

6.7 Reduksjon av orden når y –leddet mangler

Eksempel med tredjeordens lineær ligning:

$y''' + 2y'' + y' = 0$

Når y mangler kan vi skifte til $u = y'$ og får en ny ligning av andre orden:

$u'' + 2u' + u = 0$

Karakteristisk ligning $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$ gir $r = -1$ og løsningen:

$u = (Ex + F)e^{-x}$

Tilbake til y:

$$
\begin{aligned}
&y' = (Ex + F)e^{-x} \Leftrightarrow \\
&y = E\int xe^{-x}dx + F\int e^{-x}dx = E(-xe^{-x} - \int -e^{-x}dx) - Fe^{-x} + G = \\
&\quad -Exe^{-x} - Ee^{-x} - Fe^{-x} + G = C_1xe^{-x} + C_2e^{-x} + C_3
\end{aligned}
$$

Eksempel med en andreordens ulineær ligning:

$y'' + (y')^2 = 0$

$u = y'$ gir: $\quad u' + u^2 = 0$ som er førsteordens og separabel:

$\int(-\frac{1}{u^2})du = \int dx \Leftrightarrow u^{-1} = x + D \Leftrightarrow u = \frac{1}{x+D}$

Tilbake til y:

$y' = \frac{1}{x+D} \Leftrightarrow y = \int \frac{1}{x+D}dx = \ln|x + D| + E = \ln|x + C_1| + C_2$

Innføring av $u = y^2$ i førsteordens ligninger

Se oppgave 671 side 409

Hvis yy' og y^2 forekommer i en førsteordens ligning kan man skifte til variabelen

$$u = y^2 \qquad \text{der} \qquad u' = 2yy'$$

Eksempel: (Oppgave 671 c) side 409)

$2xyy' + y^2 = 12x^2 \Leftrightarrow xu' + u = 12x^2 \Leftrightarrow$

$(xu)' = 12x^2 \Leftrightarrow xu = 12\int x^2dx = \frac{12x^3}{3} + C = 4x^3 + C$

$u = y^2 = 4x^2 + \frac{C}{x} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4x^2 + \frac{C}{x}}$

Et eksempel til:

$yy' = x + xy^2 \Leftrightarrow 2yy' = 2x + 2xy^2$

$(y^2)' = 2x + 2x(y^2) \Leftrightarrow u' = 2x + 2xu \Leftrightarrow u' - 2xu = 2x \qquad IF = e^{\int -2xdx} = e^{-x^2}$

$(ue^{-x^2})' = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow ue^{-x^2} = \int 2xe^{-x^2}dx = C - e^{-x^2}$

$u = Ce^{x^2} - 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{Ce^{x^2} - 1}$

Reduksjon av orden når vi kjenner en spesiell løsning

(Nevnt i læreverket Sigma.)

Denne metoden er også den mest kjente for å takle andreordens differensialligninger som ***ikke har konstante koeffisienter!***

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Hvis vi kjenner en spesiell løsning y_0 (som vi ser er løsning eller skjønner er løsning ut fra et praktisk eksempel), så kan vi innføre $y = u \cdot y_0$ og får da ved innsetting:

$y' = u'y_0 + uy_0'$ og videre $y'' = u''y_0 + u'y_0' + u'y_0' + uy_0'' = u''y_0 + 2u'y_0' + uy_0''$

som innsatt gir oss: $(u''y_0 + 2u'y_0' + uy_0'') + p(x)(u'y_0 + uy_0') + q(x)uy_0 = 0 \Leftrightarrow$

$u''y_0 + 2u'y_0' + p(x)u'y_0' + u(y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0) = 0$

Da y_0 er løsning av ligningen må $y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0 = 0$ slik at den siste parentesen faller bort, og da får vi:

$u''y_0 + (2y_0' + p(x)y_0)u' = 0$ som er en ligning uten u og derfor kan reduseres til en første ordens ligning:

$y_0v' + (2y_0' + p(x)y_0)v = 0$

Metode oppsummert:

Har en spesiell løsning y_0 av $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Skifter variabel til: $y_0v' + (2y_0' + p(x)y_0)v = 0,$ der $v = u'$ og $y = u \cdot y_0$

Eksempel:

$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$

Her ser vi rimelig enkelt (?) at $y_0 = x^2$ er en løsning, da $y_0' = 2x$ og $y_0'' = 2$, som innsatt gir:

$VS = 2 - \frac{2}{x}2x + \frac{2}{x^2}x^2 = 2 - 4 + 2 = 0$

Vi bruker metoden over: $2y_0' + p(x)y_0 = 4x + (-\frac{2}{x})x^2 = 4x - 2x = 2x$

Slik at vi får:
$x^2v' + 2xv = 0$ som kan løses

med integrerende faktor: $v' + \frac{2}{x}v = 0$

eller separabelt: $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2}{x}dx$

men aller enklest direkte med multiplikasjonsregel:

$$(x^2v)' = 0 \Leftrightarrow x^2v = \int 0dx = D \Leftrightarrow v = \frac{D}{x^2}$$

Tilbake til u:

$$u' = \frac{D}{x^2} \Leftrightarrow u = D\int x^{-2}dx = -Dx^{-1} + E = \frac{F}{x} + E$$

Og til slutt:

$$y = u \cdot y_0 = (\frac{F}{x} + E)x^2 = C_1x + C_2x^2$$

Andre interessante og morsomme triks

Bernoullis differensialligning

Hvis vi har forstyrrende y –ledd på høyre side, eksempelvis:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

Kan vi multiplisere med $(1-n)y^{-n}$ og får da:

$$y'(1-n)y^{-n} + p(x)(1-n)y^{1-n} = (1-n)q(x)$$

Innfører vi en ny variabel $u = y^{1-n}$ har vi $u' = (1-n)y^{-n}y'$ og kan dermed omforme ligningen til:

$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$ hvor vi ser at vi har blitt kvitt y –ene på høyre side.

Eksempel:

$y' + \frac{1}{x}y = xy^3$ Vi multipliserer med $(1-3)y^{-3} = -2y^{-3}$ og får:

$-2y^{-3}y' + \frac{1}{x}(-2)y^{-3+1} = x(-2)$ Med $u = y^{1-3} = y^{-2}$ får vi $u' = -2y^{-3}y'$ og kan omforme til:

$u' - \frac{2}{x}u = -2x$ som kan løses med integrerende faktor, men enda enklere med brøkregel:

$$(\frac{x^2u' - 2xu}{x^4})' = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{u}{x^2} = -2\int \frac{1}{x}dx = -2\ln|x| + D \Leftrightarrow u = -2x^2\ln|x| + Cx^2 = (C - 2\ln|x|)x^2$$

som igjen gir oss: $\frac{1}{y^2} = (C - 2\ln|x|)x^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\pm\sqrt{(C-2\ln|x|)x^2}} = \frac{1}{\pm x\sqrt{C - \ln x^2}}$

Bruk av multiplikasjons- og brøkregelen for derivasjon:

$$xy' + y = f(x) \Leftrightarrow (xy)' = f(x) \Leftrightarrow xy = \int f(x)dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}\int f(x)dx$$

$$xy' - y = f(x) \Leftrightarrow \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow (\frac{y}{x})' = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow y = x\int \frac{f(x)}{x^2}dx$$

(Hvis man har y^2 på høyre side: $xy' - y = f(x)y^2$, kan også
$\frac{y-xy'}{y^2} = -f(x) \Leftrightarrow (\frac{x}{y})' = -f(x)$ være aktuell.)

Med n heltallig går også:
$xy' + ny = f(x) \Leftrightarrow x^n y' + nx^{n-1}y = f(x)x^{n-1} \Leftrightarrow (x^n y)' = f(x)x^{n-1} \Leftrightarrow y = x^{-n}\int f(x)x^{n-1}dx$

$xy' - ny = f(x) \Leftrightarrow \frac{x^n y' - nx^{n-1}y}{(x^n)^2} = f(x)\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \Leftrightarrow (\frac{y}{x^n})' = f(x)\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \Leftrightarrow y = x^{-n}\int f(x)\frac{x^{n-1}}{x^{2n}}dx$

Innføring av $u = (y')^2$ i ulineære andreordens ligninger

Hvis vi har ledd med $y''y'$ og $(y')^2$ kan vi skifte til variabelen

$u = (y')^2$, der $u' = 2y'y''$ ved hjelp av kjerneregelen.

(Kan eventuelt lage en slik ligning ved å multiplisere med y'.)

Eksempel:

$y''y' - (y')^2 = 0$

Innfører $u = (y')^2$ og $u' = 2y'y''$ og får:

$\frac{u'}{2} - u = 0 \Leftrightarrow \int \frac{1}{u}du = 2\int dx \Leftrightarrow \ln|u| = 2x + D \Leftrightarrow u = Ee^{2x}$

$(y')^2 = Ee^{2x} \Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{Ee^{2x}} = F(e^{2x})^{\frac{1}{2}} = Fe^x \Leftrightarrow$

$y = F\int e^x dx = Ce^x + D$

Dette trikset funker best hvis x ikke forekommer, men ofte kan man få integraler av typen $y = \pm\int\sqrt{f(x)}\,dx$ som er vanskelig å løse når man går tilbake til y fra u...

Dette eksemplet kunne også vært løst med faktorisering:

$(y'' - y')y' = 0 \Leftrightarrow y'' - y' = 0 \lor y' = 0$

$y'' - y' = 0 \Rightarrow$Karakteristisk ligning: $r^2 - r = 0 \Leftrightarrow r = 0 \lor r = 1$
og løsning:
$y = C_1e^{0x} + C_2e^{1x} = C_1 + C_2e^x$ (som er samme resultat som over.)

($y' = 0 \Rightarrow y = C$, som er inkludert i løsningen over når $C_2 = 0$.)

Homogene i x og y

(Her betyr "homogen" noen annet enn at differensialligningen har 0 på høyre side...)

$y' = f(x,y)$der alle ledd har samme samlede potens av x og y slik at vi kan gjøre om til

$xv' + v = g(v)$

ved å innføre der $v = \frac{y}{x}$, som gir: $y' = (xv)' = xv' + v$

Generelt: $y' = f(x,y) \Leftrightarrow xv' + v = g(v) \Leftrightarrow \int \frac{1}{g(v)-v} dv = \int \frac{1}{x} dx$

Eksempel 1:

$y' + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = 0$ eller $x^2y' + xy - y^2 = 0$ gir:

$y' = v^2 - v$ Alt har andre potens tilsammen av x og y.

Innfører: $v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xv$ slik at: $y' = xv' + v$

Vi får: $xv' + v = v^2 - v \Leftrightarrow xv' = v^2 - 2v \Leftrightarrow \int \frac{1}{v^2-2v} dv = \int \frac{1}{x} dx$

$\frac{1}{-2} \int (\frac{1}{v} - \frac{1}{v-2}) dx = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \ln|v| - \ln|v-2| = -2\ln|x| + D$

$\ln \frac{v}{v-2} = -\ln x^2 + D \Leftrightarrow \frac{v}{v-2} = Fe^{-\ln x^2} = Fx^{-2}$

$v = Fx^{-2}v - 2Fx^{-2} \Leftrightarrow v = \frac{y}{x} = \frac{-2Fx^{-2}}{1-Fx^{-2}} = \frac{2F}{F-x^2} = \frac{2}{1+Cx^2}$

$y = \frac{2x}{1+Cx^2}$

(Går også med Bernoulli: $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} y^2$)

Eksempel 2:

$y' = \frac{xy}{x^2+y^2} \Leftrightarrow xv' + v = \frac{v}{1+v^2}$, $v = \frac{y}{x}$, $y' = xv' + v$

$xv' = \frac{v}{1+v^2} - \frac{v+v^3}{1+v^2} = \frac{-v^3}{1+v^2} \Leftrightarrow \int \frac{1+v^2}{v^3} dv = -\int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$
$\int (v^{-3} + v^{-1}) dv = \int x^{-1} dx \Leftrightarrow -\frac{v^{-2}}{2} + \ln|v| = \ln|x| + D \Leftrightarrow$

$\frac{x^2}{y^2} = 2\ln\frac{y}{x} + 2\ln x + \ln C$ (Ikke eksplisitt, men ligning for løsningskurve.)
$\frac{x^2}{y^2} = \ln Cy^2 \Leftrightarrow x = \pm y^2\sqrt{Cy^2}$ (Kan altså løse som $x = f(y)$)