Foreløpige svar og løsningsskisser eksamen R2 V 2017

Del I:

Oppgave 1

a) $f'(x) = 3\cos x - \sin x$

b) Produktregel (og kjerneregel):
$g'(x) = 2x\cos 2x + x^2(-\sin(2x)2) = 2x(\cos 2x - x\sin 2x)$

c) Brøkregel: $h'(x) = \frac{-2\sin x(1+\sin x)-2\cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-2\sin x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{(1+\sin x)^2} =$
$\frac{-2\sin x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-2\sin x - 2}{(1+\sin x)^2} = \frac{-2(\sin x + 1)}{(1+\sin x)^2} = -\frac{2}{1+\sin x}$

Oppgave 2

a) $\int (x^2 - \frac{2}{x})dx = \frac{x^3}{3} - 2\ln|x| + C$

b) Variabelskifte: $u = 2x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x$
$\int x\cos(2x^2)dx = \int x\cos(u)\frac{du}{4x} = \frac{1}{4}\int \cos u \, du = \frac{1}{4}\sin u + C =$
$\frac{1}{4}\sin(2x^2) + C$

Oppgave 3

Tegn figur:
Likevektslinje: $y = 1$
Amplitude: $A = 2$
Periode: $T = \pi$ (2 hele svingninger i definisjonsområdet)
Ingen faseforskyvning.

Ser da direkte fra figur:
a) Toppunkter: $(\frac{\pi}{4}, 1), (\frac{5\pi}{4}, 1)$
Bunnpunkter: $(\frac{3\pi}{4}, -3), (\frac{7\pi}{4}, -3)$

b) Nullpunker: $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$

c) Se tidligere, jeg ville gjort dette først, men oppgaven tenker vel at man skal regne på a) og b), noe jeg synes er litt tungvindt her...

Oppgave 4

a) Separabel: $\int \frac{1}{y}dy = \int x dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1$
Generell løsning: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

b) Initialbetingelse gir: $5 = Ce^{\frac{2^2}{2}} \Leftrightarrow 5 = Ce^2 \Leftrightarrow C = \frac{5}{e^2}$

Spesiell løsning: $y = \frac{5}{e^2} e^{\frac{x^2}{2}}$ (eller $y = 5e^{\frac{x^2-4}{2}}$)

Oppgave 5

l : $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

Volum: $V = \pi \int_0^4 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^4 (\frac{x^2}{4} + 3x + 9)dx = \pi\ {}_0^4\Big[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x\Big] =$
$\pi(\frac{16}{3} + 24 + 36 - 0) = \frac{196}{3}\pi$

(Kontroll for dem som kan formelen: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$)

Oppgave 6

$\overrightarrow{SP} = [3, -4, 0]$ gir radius: $R = \left|\overrightarrow{SP}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

a) Ligning: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 5^2$

b) Normalvektor til plan: $\vec{n} = \overrightarrow{SP} = [3, -4, 0]$

Ligning,da P ligger i planet: $[x-4, y+1, z-5] \cdot [3, -4, 0] = 0 \Leftrightarrow$
$3x - 4y - 16 = 0$ *QED*

c) Avstand fra Q til plan blir radius:

$r = \left|\frac{3x_Q - 4y_Q - 16}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \left|\frac{3\cdot 2 - 4\cdot 0 - 16}{5}\right| = \left|\frac{-10}{5}\right| = 2$

): $(x-2)^2 + y^2 + (z-7)^2 = 2^2$

Oppgave 7

a) Kvotient: $k = \ln x$, $x > 0$

Krav: $-1 < \ln x < 1$:

$-1 < \ln x \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x$

$\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$

Konvergensområde: $\langle \frac{1}{e}, e \rangle$

b) $S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\ln x}$

c) $\frac{1}{1-\ln x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\ln x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-3(1-\ln x)}{1-\ln x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\ln x - 2}{1-\ln x} = 0$

$\ln x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$ (Er i konvergensområdet.)

d) $S(x) = r \Leftrightarrow \frac{1}{1-\ln x} = r \Leftrightarrow \frac{1-r(1-\ln x)}{1-\ln x} = 0 \Leftrightarrow \frac{r\ln x-(r-1)}{1-\ln x} = 0$

$r\ln x - (r-1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{r-1}{r}$

Krav: $-1 < \frac{r-1}{r} < 1$

Løser ulikhetene med tallinjer og får: $r > \frac{1}{2}$

Oppgave 8

Formel for sum: $S(n) = \frac{n!-1}{n!}$
Formel for $n'te$ ledd: $a(n) = \frac{n-1}{n!}$

I Startverdi: $n = 2$:
VS =sum= $a(2) = \frac{2-1}{2!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$
HS =formel= $S(2) = \frac{2!-1}{2!} = \frac{1}{2}$
OK

II Induksjonstrinn: $n \to n+1$:

Antar at formel er riktig for $n = k$: $S(k) = \frac{k!-1}{k!}$

Må vise at $S(k+1) = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$

$S(k+1) = S(k) + a(k+1) = \frac{k!-1}{k!} + \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{(k!-1)(k+1)}{k!(k+1)} + \frac{k}{(k+1)!} =$
$\frac{(k!-1)(k+1)}{(k+1)!} + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{k!(k+1)-(k+1)+k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$

OK

Del II:

Oppgave 1

a) Graf i GGB, se c)

b) Bruk CAS:
f'(x)=0 Løs $\to$ $\{-\frac{5}{2}, -1\}$

A:=(-5/2,f(-5/2))
B:=(-1,f(-1))
g(x):=Linje[A,B] $\to$ $g(x) = -\frac{5}{8}x - \frac{5}{8}$

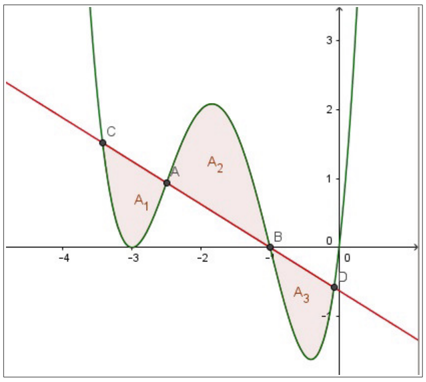
Skjæring[f,g] $\to$ $\{(-1,0), (-\frac{5}{2}, \frac{15}{16}), (\frac{3\sqrt{5}-7}{4}, \ldots), (\frac{-3\sqrt{5}-7}{4}, \ldots)\}$
som er B, A, C, D

C:=Element[$5,4]
D:=Element[$5,3]

a:=x(C)
b:=x(D)
I:=Integral[f-g,x,a,b] → 0 (Integralet blir 0!)

Dette betyr at arealene oppfyller ligningen: $A_1 + A_3 = A_2$

(Det kan også vises at $A_1 = A_3$)



Oppgave 2

a)
I Geogebra CAS:
A:=(3,2,t)
B:=(4,-3,3)
C:=(8,3,5)
ab:=Vektor[A,B]
ac:=Vektor[A,C]
f(t):=|ab×ac|/2

GeoGebra viser: $f(t) = \sqrt{13}\sqrt{t^2 - 8t + 30}$
Som vi kan skrive om til: $f(t) = \sqrt{13(t^2 - 8t + 30)}$ *QED*
b)
Vi fortsetter:
f'(t)=0 Løs gir: {t=4}
f(4) gir: $\sqrt{182} \approx 13.5$ (graf viser at dette er minimum)

): Minste areal er 13.5

Oppgave 3

I GeoGebra CAS:
f(x):=2 sin(pi x+pi/2)+d
V:=pi integral[f ^2,1,2] gir: $\pi(d^2 + 2)$
V=6 pi Løs gir: $\{d = -2, d = 2\}$

): Mulige verdier er altså $d = -2$ eller $d = 2$

Oppgave 4

a) Vi har $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{a}{1-k}$ og $T = \frac{a}{1-2k}$, så vi gjør i CAS:

S:=a/(1-k)
T:=a/(1-2k)
S=6
T=12
Løs[{$3,$4}] (eller merke linje 3 og 4 og trykke Løs-knapp) gir:
$\{\{a = 4, k = \frac{1}{3}\}\}$

): $a = 4 \wedge k = \frac{1}{3}$ (Ok, da både k og $2k$ ligger i konvergensområdet.)

b) Obs: Ikke nok å skrive $S = -2\ T$ og trykke løs, gir bare
den trivielle løsningen $a = 0$!

Løs[S=-2 T,k] gir: $\{k = \frac{3}{4}\}$

Men, $2k = \frac{3}{2}$ er utenfor konvergensområdet for T, så det er ikke mulig å finne en k slik at $S = -2T$.

Oppgave 5

a)	Endring [mg/time]	=	Tilført	-	Utskilt
	y'	=	3	$-$	$0.3y$

At pasienten ikke har medisin i kroppen ved oppstart gir initialbetingelsen $y(0) = 0$

b)

GeoGebra CAS:
f(x):=LøsODE[y'=3-0.3 y,y,t,(0,0)] gir: $f(x) := -10e^{-\frac{3}{10}t} + 10$

): Spesiell løsning $y = 10 - 10e^{-0.3t}$

c) $\lim_{t\to\infty} y = 10 - 10\lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{0.3t}} = 10 - 10 \cdot 0 = 10$

): Medisinmengden i pasienten vil stabilisere seg på 10 mg.

d) g(t):=LøsODE[y'=3-0.3 y,y,t,(0,y_0)] gir: $g(t) := y_0 e^{-\frac{3}{10}t} - 10e^{-\frac{3}{10}t} + 10$

g(6)=9.17 og Numerisk Løs-knappen gir: $\{y_0 = 4.98\}$

): Den andre pasienten har 5.0 mg medisin i kroppen ved behandlingsstart.