Heldagsprøve R2 - 27.04.12

Løsningsskisser

Versjon 03.05.12

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = x^2 \ln x$ 2) $g(x) = 3\cos(4x)$ 3) $h(x) = \frac{a^x}{\ln x}$

1) Produktregel: $f'(x) = 2x\ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$

2) Kjerneregel: $g(x) = 3\cos u, \qquad u = 4x$
$g'(x) = 3(-\sin u)4 = -12\sin 4x$

3) Brøkregel: $h'(x) = \frac{a^x \ln a \ln x - a^x \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{a^x(\ln a \ln x - \frac{1}{x})}{\ln^2 x} = \frac{a^x(\ln a \cdot x \ln x - 1)}{x \ln^2 x}$

(Husk at: $(a^x)' = a^x \ln a$)

b) Bestem integralene:

1) $\int xe^{-2x} dx$

2) $\int \frac{x}{x^2-9} dx$

3) $\int \frac{1}{x^2-9} dx$

4) $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} dx$

1) Delvis integrasjon:
$$\int xe^{-2x}dx = x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2}dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx =$$
$$-\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\frac{e^{-2x}}{-2} + C = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C =$$
$$C - \frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1)$$

2) Variabelskifte: $u = x^2 - 9 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$
$$\int \frac{x}{x^2-9}dx = \int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C =$$
$$\frac{1}{2}\ln|x^2-9| + C$$

3) Brøkdekomponering:
$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx-3B}{(x-3)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-3B)}{(x-3)(x+3)}$$

$A + B = 0 \wedge 3A - 3B = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6} \wedge B = -\frac{1}{6}$

$\int \frac{1}{x^2-9} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| + C =$
$\frac{1}{6}(\ln|x-3| - \ln|x+3|) + C = \frac{1}{6} \ln|\frac{x-3}{x+3}| + C$

4) Variabelskifte: $u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow dx = \cos^2 x du$
$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{u^3}{\cos^2 x} \cos^2 x\, du = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C =$
$\frac{1}{4} \tan^4 x + C$

c) Vi har gitt rekken:
$5 + 10 + 15 + 20 + \ldots$
Skriv opp delsummene S_1, S_2, S_3, S_4 og bestem S_{100}.

c) Aritmetisk rekke med $a_1 = 5$ og $d = 5$:
$a_n = a_1 + d(n-1) = 5 + 5(n-1) = 5n$
$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} = (5 + 5n)\frac{n}{2} = \frac{5}{2} n(n+1)$
Vi får da:
$S_1 = 5,\ S_2 = 15,\ S_3 = 30,\ S_4 = 50$
og
$S_{100} = \frac{5}{2} 100(100+1) = 25\,250$

d) Vi har gitt rekken:
$1 + 6 + 16 + 31 + 51 + \ldots$
Skriv opp delsummene S_1, S_2, S_3, S_4 og bestem $n'te$ ledd i rekken.
(Ikke $n'te$ sum, da måtte vi eventuelt ha brukt regresjon på lommeregner.)

d) Ikke aritmetisk eller geometrisk...
Vi regner ut delsummene:
$S_n : 1, 7, 23, 54, 105, \ldots$

Alltid lurt å sjekke differansene
$a_n : 1,\ 6,\ 16, 31, 61, \ldots$
$d_n : 5, 10, 15, 20, \ldots$
$d_n = 5n$ og $\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{5}{2} n(n+1)$ Se 1c)

n'te ledd kan lages ved å starte med første ledd og legge til
$n-1$ differanser, altså regne ut:
$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 1 + \frac{5}{2}(n-1)(n-1+1) =$
$1 + \frac{5}{2}(n-1)n = \frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 1$
$a_{100} = \frac{5}{2}100^2 - \frac{5}{2}100 + 1 = 24\,751$

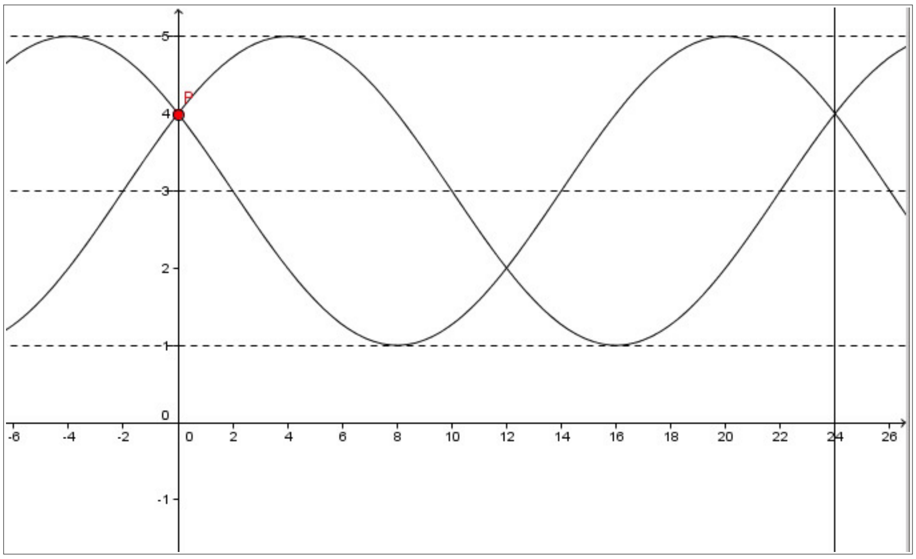
e) Bestem parameterene a, b, c og d i funksjonen
$f(x) = a \sin(bx + c) + d, \quad x \in [0, 24]$
hvis vi vet at $f(x)$ har største verdi 5, minste verdi 1, periode 24 og
går gjennom punktet $(0, 4)$.

e) Amplitude: $a = \frac{\text{max-min}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$
Likevektslinje/gjennomsnitt: $d = \frac{\text{max+min}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$
$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

c finner vi vha. punktet $(0,4)$:

$2\sin(\frac{\pi}{12}0 + c) + 3 = 4 \Leftrightarrow \sin c = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$c = \frac{\pi}{6} + k2\pi \lor c = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi$

Velger for enkelthets skyld c i første omløp og får to muligheter:
$f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{12}x + \frac{\pi}{6}) + 3$ eller $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{6}) + 3$



f) Løs differensialligningene:

1) $y' - 2y = 0$ når $y(0) = 1$
2) $y' - 2y = x$ når $y(0) = 1$
3) $y'' + 2y' + 10y = 0$ når $y(0) = 1$

1) Separabel: $\frac{y'}{y} = 2$ (Hvis ikke triviell løsning $y = 0$)

$\int \frac{y'}{y}dx = \int 2dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = 2\int dx \Leftrightarrow$
$\ln|y| = 2x + C_1 \Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{2x+C_1} \Leftrightarrow |y| = e^{2x}e^{C_1} \Leftrightarrow$
$|y| = C_2e^{2x} \Leftrightarrow y = Ce^{2x}$

Generell løsning: $y = Ce^{2x}$ (Triviell løsning $y = 0$ inkludert.)

$y(0) = 1:$ $1 = Ce^0 \Leftrightarrow C = 1$

Spesiell løsning: $y = e^{2x}$

2) Ikke separabel, må bruke integrerende faktor:

$IF = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$ og får da:
$y'e^{-2x} - 2ye^{-2x} = xe^{-2x}$
$(ye^{-2x})' = xe^{-2x}$
$ye^{-2x} = \int xe^{-2x}dx$
$ye^{-2x} = C - \frac{1}{4}e^{-2x}(2x + 1)$ (Se oppgave b) 1) !)
$y = Ce^{2x} - \frac{1}{4}(2x + 1) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ (Generell løsning)

$y(0) = 1:$ $1 = Ce^0 - 0 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow C = \frac{5}{4}$

Spesiell løsning: $y = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

3) Karakteristisk ligning: $r^2 + 2r + 10 = 0$

abc-formel: $r = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-1}\sqrt{36}}{2} = \frac{-2\pm i6}{2} = -1 \pm 3i$

Generell løsning: $y = e^{-x}(C\sin 3x + D\cos 3x)$

$y(0) = 1$: $\quad 1 = e^0(C \cdot 0 + D \cdot 1) \Leftrightarrow D = 1$

$y = e^{-x}(C\sin 3x + \cos 3x)$

(Feil i oppgaven: Burde hatt enda en initialbetingelse i oppgaven for å kunne bestemme C, eksempelvis: $y'(0) = 1$

Da kunne vi gjort:

$y' = -e^{-x}(C\sin 3x + \cos 3x) + e^{-x}(C3\cos 3x - 3\sin 3x) =$
$e^{-x}(-C\sin 3x - \cos 3x + 3C\cos 3x - 3\sin 3x) =$
$e^{-x}((-C-3)\sin 3x + (3C-1)\cos 3x)$

$1 = e^0((-C-3)0 + (3C-1)1) \Leftrightarrow 3C - 1 = 1 \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}$

Og ville da fått spesiell løsning: $y = e^{-x}(\frac{2}{3}\sin 3x + \cos 3x)$)

g) Gitt punktene $A(1,0,2)$, $B(3,2,4)$ og $C(5,6,8)$.
1) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$
2) Bestem arealet av trekanten ABC.
3) Bestem volumet av pyramiden $ABCT$, der pyramiden har ABC som grunnflate og $T = (0,7,3)$ som toppunkt.

1) $\overline{AB} = [2,2,2], \quad \overline{AC} = [4,6,6]$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{vmatrix} = [2\cdot6 - 2\cdot6, -(2\cdot6 - 2\cdot4), 2\cdot6 - 2\cdot4] = [0,-4,4]$$

2) $\text{Areal}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = \frac{1}{2}4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad (\approx 2.83)$

3) $\overrightarrow{AT} = [-1,7,1]$

$\text{Volum}_{ABCT} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AT}\right| = \frac{1}{6}|[0,-4,4]\cdot[-1,7,1]| = \frac{1}{6}|-28+4| = 4$

Del 2 - Med hjelpemidler

Oppgave 2

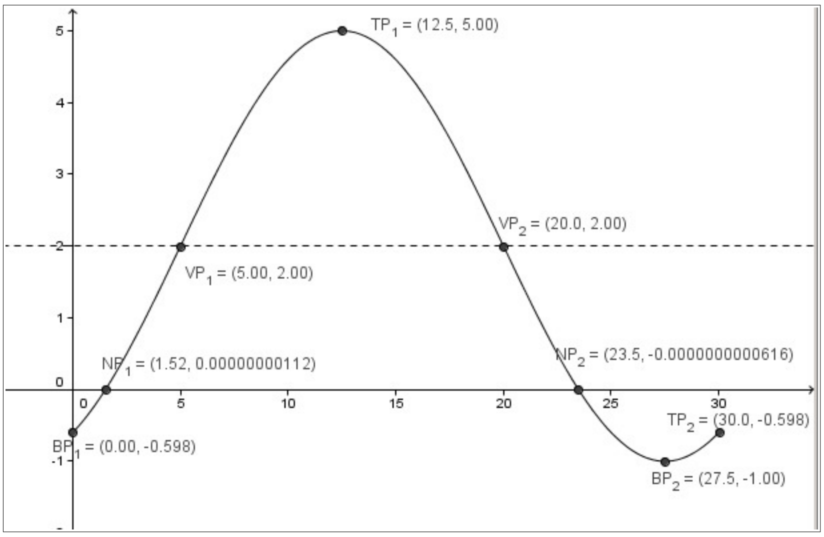
Funksjonen $f(x)$ er gitt ved:

$f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{3}) + 2, \quad x \in \langle 0,30\rangle$

a) Tegn grafen til $f(x)$.
b) Bestem ved regning eventuelle null-, ekstremal- og vendepunkter til $f(x)$.

c) Skriv om funksjonen til formen:
$f(x) = a\cos(bx + c) + d$

a) Skriver om litt: $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{15}(x-5)) + 2$
Altså amplitude 3, likevektslinje 2, periode 30 ($\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{15}$)
og faseforskjøvet 5 til høyre:



b) **Nullpunkter:**
$3\sin(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{3}) + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow$
$\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{3} = -0.730 + k2\pi \vee \frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{3} = \pi - (-0.730) + k2\pi \Leftrightarrow$
$x = 1.51 + k30 \vee x = 23.5 + k30$
): $NP_1 = (1.51, 0), \qquad NP_2 = (23.5, 0)$

Ekstremalpunkter:
Topp-punkter:
Maksverdi $3 \cdot 1 + 2 = 5$ når sin er 1:
$\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = 12.5 + 30k$

$TP_1 = (12.5, f(12.5)) = (12.5, 5)$

(Ikke $TP_2 = (30, f(30)) \approx (30, -0.598)$ da definisjonsmengden er det *åpne* intervallet $\langle 0, 30\rangle$.)
Bunn-punkter:
Minverdi $3(-1) + 2$ når sin er -1:
$\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = 27.5 + 30k$

$BP_2 = (27.5, f(27.5)) = (27.5, -1)$

(Ikke $BP_1 = (0, f(0)) \approx (0, -0.598)$ da definisjonsmengden er det *åpne* intervallet $\langle 0, 30\rangle$.)

Vendepunkter:
Kryssing av likevektslinjen, når sin $= 0$:
$\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{3} = 0 + k\pi \Leftrightarrow x = 5 + k15$

$VP_1 = (5, f(5)) = (5, 2)$

$VP_2 = (20, f(20)) = (20, 2)$

c) Bruker formlene:

$\sin v = \cos(\frac{\pi}{2} - v)$ og $\cos(v) = \cos(-v)$:

$f(x) = 3\cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{3})) + 2 = 3\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}x + \frac{\pi}{3}) + 2 =$
$3\cos(-\frac{\pi}{15}x + \frac{5\pi}{6}) + 2 = 3\cos(-(-\frac{\pi}{15}x + \frac{5\pi}{6})) + 2 =$
$3\cos(\frac{\pi}{15}x - \frac{5\pi}{6}) + 2$

Eventuelt:
cosinus-funksjon med samme amplitude, periode og likevektslinje, men faseforskjøvet 12.5 mot høyre:

$3\cos(\frac{\pi}{15}(x - 12.5)) + 2 = 3\cos(\frac{\pi}{15}x - \frac{12.5\pi}{15}) + 2 =$
$3\cos(\frac{\pi}{15}x - \frac{5\pi}{6}) + 2$

Eller:
Rett og slett regne ut c-verdien med for eksempel punktet $(12.5, 5)$:

$3\cos(\frac{\pi}{15}12.5 + c) + 2 = 5 \Leftrightarrow \cos(\frac{5\pi}{6} + c) = 1 \Leftrightarrow$
$\frac{5\pi}{6} + c = 0 + k\pi \Leftrightarrow c = -\frac{5\pi}{6} + k\pi$
): $\quad 3\cos(\frac{\pi}{15}x - \frac{5\pi}{6}) + 2$

Oppgave 3

Vi har gitt funksjonen

$f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

Bestem ved regning funksjonens nullpunkter og ekstremalpunkter.

Nullpunkter: $2u^2 + u - 1 = 0, \qquad u = \sin x$

abc: $u = -1 \vee u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow$

): $(\frac{\pi}{6}, 0), (\frac{5\pi}{6}, 0), (\frac{3\pi}{2}, 0)$

Ekstremalpunkter:

$f'(x) = 2 \cdot 2\sin x\cos x + \cos x = 4\cos x(\sin x + \frac{1}{4})$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -0.253 + k2\pi \vee x = \pi - (-0.253) + k2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -0.253 + k2\pi \vee x = 3.39 + k2\pi$
Innenfor $[0, 2\pi\rangle$: $\frac{\pi}{2}, 3.39, \frac{3\pi}{2}, 6.03$

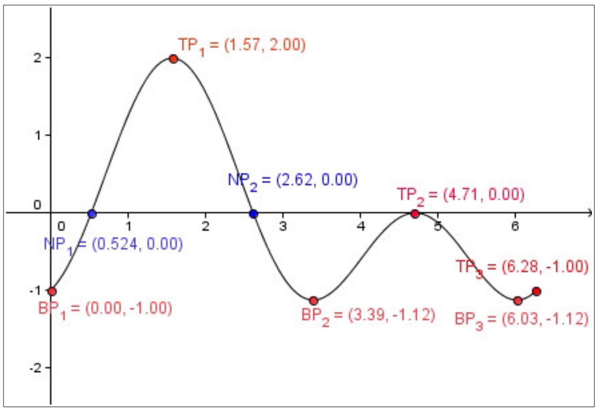
Topp-punkter:

$TP_1 = (\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}, 2)$
$TP_2 = (\frac{3\pi}{2}, f(\frac{3\pi}{2})) = (\frac{3\pi}{2}, 0)$ (Lik nullpunkt.)

(Ikke $TP_3 = (2\pi, f(2\pi)) = (2\pi, -1)$ da 2π *ikke* i definisjonsmengde)

Bunnpunkter:

$BP_1 = (0, f(0)) = (0, -1)$ (Endepunkt, i definisjonsmengde)
$BP_2 = (3.39, f(3.39)) = (3.39, -1.12)$
$BP_3 = (6.03, f(6.03)) = (6.03, -1.12)$



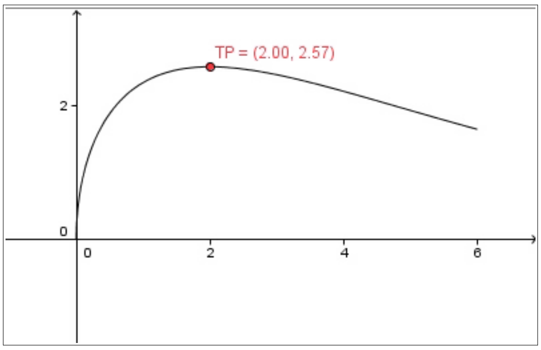
Oppgave 4

En fabrikk lager et skaft til et skrujern.
Skaftene ser ut som omdreiningslegemet vi får når vi dreier grafen til

$f(x) = 3\sqrt{x}\,e^{-\frac{x}{4}}, \qquad 0 \le x \le 6$

360° om x-aksen. Vi bruker 1 cm som enhet på begge akser.
a) Tegn en skisse av skaftet.
b) Bestem ved regning diameteren til skaftet der skaftet er bredest.
c) Bestem ved regning volumet av skaftet.

a)



Må tegne en figur av *hele skaftet*, ikke bare funksjonen, slik jeg har gjort her.

b) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{4}}$

Produktregel:

$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{4}} + 3x^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{4})e^{-\frac{1}{4}} = (\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{4})e^{-\frac{x}{4}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{6-3\sqrt{x}\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow$
$\frac{6-3x}{4\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Største diameter: $2f(2) = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}\,e^{-\frac{2}{4}} \approx 5.15$ [cm]

c) $V = \pi\int_0^6 f^2(x)dx = 9\pi\int_0^6 xe^{-\frac{x}{2}}dx$

Delvis integrasjon:

$\int xe^{-\frac{x}{2}}dx = x\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \int \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}}dx = -2xe^{-\frac{x}{2}} + 2\int e^{-\frac{x}{2}}dx =$

$$-2xe^{-\frac{x}{2}}+2\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C = C-2xe^{-\frac{x}{2}}-4e^{-\frac{x}{2}}$$

$$V = 9\pi\int_0^6 xe^{-\frac{x}{2}}dx = 9\pi\Big[\ -2xe^{-\frac{x}{2}}-4e^{-\frac{x}{2}}\ \Big]_0^6 =$$
$$9\pi(-2\cdot 6\cdot e^{-\frac{6}{2}}-4\cdot e^{-\frac{6}{2}}-(-2\cdot 0\cdot e^0-4\cdot e^0)) \ \approx 90.6\ [\mathrm{cm}^3]$$
(Overslag/kontroll: Litt større enn sylinder med radius 2 og høyde 6: $\pi 2^2 6 \approx 75$)

Oppgave 5

Ligningen til en kuleflate er gitt ved
$$x^2-4x+y^2-6y+z^2-8z+4 = 0$$
a) Finn sentrum og radius i kulen.
b) En rett linje l gjennom sentrum er gitt ved:
$$l : \left\{\begin{array}{c} x = 2+t \\ y = 3+2t \\ z = 4+2t \end{array}\right\}$$
Finn skjæringspunktene mellom l og kuleflaten.
c) Planene α og β tangerer kulen i hvert av skjæringspunktene fra b).
Bestem ligningene til planene α og β.

d) Et plan γ er parallelt med planene α og β og deler kuleflaten i to deler slik at den minste delens overflate er en fjerdedel av den totale kuleflaten.
Bestem ligningen for planet γ, gitt at γ er den muligheten som ligger lengst fra Origo.

a) Lager fulle kvadrater:
$$(x^2-4x+2^2)+(y^2-6y+3^2)+(z^2-8z+4^2)+4 = 2^2+3^2+4^2 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 = 5^2$$
): Sentrum $S = (2,3,4)$, Radius: $R = 5$

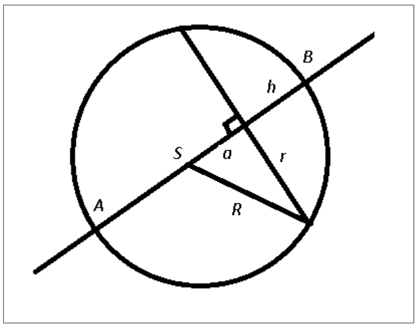
b) $(2+t-2)^2+(3+2t-3)^2+(4+2t-4)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$
$$t^2+4t^2+4t^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9t^2 = 5^2 \Leftrightarrow t = \pm\frac{5}{3}$$

Skjæringspunkter:
$$A = (2-\tfrac{5}{3}, 3+2(-\tfrac{5}{3}), 4+2(-\tfrac{5}{3})) = (\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})$$
$$B = (2+\tfrac{5}{3}, 3+2(\tfrac{5}{3}), 4+2(\tfrac{5}{3})) = (\tfrac{11}{3}, \tfrac{19}{3}, \tfrac{22}{3})$$

c) Planene går gjennom A og B og har retningsvektoren til l, $\vec{n} = [1,2,2]$ som normalvektor:
$$\alpha : [x-\tfrac{1}{3}, y-(-\tfrac{1}{3}), z-\tfrac{2}{3}]\cdot[1,2,2] = 0 \Leftrightarrow x+2y+2z-1 = 0$$

$$\beta : [x-\tfrac{11}{3}, y-\tfrac{19}{3}, z-\tfrac{22}{3}]\cdot[1,2,2] = 0 \Leftrightarrow x+2y+2z-31 = 0$$

d) Kuleoverflaten er $4\pi R^2 = 100\pi$
Kulekalotten vi skal skjære ut skal være:
$$2\pi Rh = \frac{4\pi R^2}{4} \Leftrightarrow h = \frac{R}{2} = \frac{5}{2}$$



Avstanden fra sentrum til planet vi skal finne blir da:

$a = R - h = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} = \frac{5}{2}$

Planet vårt har formen $x + 2y + 2z + d = 0$

Avstanden til Sentrum gitt av:

$a = \left| \frac{x_S + 2y_S + 2z_S + d}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right|$

$\frac{5}{2} = \left| \frac{2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + d}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \left| \frac{16 + d}{3} \right| \Leftrightarrow$

$\frac{16+d}{3} = \pm \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$d = \frac{5}{2} \cdot 3 - 16 = -\frac{17}{2} \vee d = -\frac{5}{2} \cdot 3 - 16 = -\frac{47}{2}$

): $\gamma : x + 2y + 2z - \frac{47}{2} = 0$

Kan eventuelt finne et punkt i planet γ, sentrum i skjæringssirkel:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \frac{5}{2} \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} = [2,3,4] + \frac{5}{2} \frac{1}{3} [1,2,2] = [\frac{17}{6}, \frac{14}{3}, \frac{17}{3}]$

Og lage planet på vanlig måte:

$[x - \frac{17}{6}, y - \frac{14}{3}, z - \frac{17}{3}] \cdot [1,2,2] = 0 \Leftrightarrow$

$x + 2y + 2z - \frac{47}{2} = 0$

Oppgave 6

En mindre by blir rammet av en influensaepidemi som kan beskrives av differensialligningen:

$y' = 0.0091y(1000 - xy)$ [antall syke], $x \in [0, \rightarrow\rangle$ [måneder]

Vi legger merke til at x forekommer på høyre siden av ligningen, slik at dette *ikke* er en logistisk ligning, så den lar seg ikke løse med de metodene vi har lært.

a) Vis at funksjonen $y = \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}$ har den deriverte:

$y' = 1000 \frac{-1 + 9.1Ce^{-9.1x}}{(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})^2}$

b) Vis at funksjonen $y = \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}$ tilfredsstiller differensialligningen

$y' = 0.0091y(1000 - xy)$

for alle reelle tall C.

c) Forklar hvorfor $y \to 0$ når $x \to \infty$.

d) I utgangspunktet har vi en syk, som smitter alle de andre, slik at vi har initialbetingelsen $y(0) = 1$.
Finn den spesielle løsningen av differensialligningen.
e) Hvor mange er syke på det meste, og når skjer det?

a) Deriverer som brøk:

$$y' = \frac{0(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}) - 1000(1 - C(-9.1)e^{-9.1x})}{(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})^2} = 1000\frac{-(1 - 9.1Ce^{-9.1x})}{(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})^2} =$$

$$1000\frac{-1 + 9.1Ce^{-9.1x}}{(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})^2}$$

b) $VS = y' = 1000\frac{-1 + 9.1Ce^{-9.1x}}{(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})^2}$

$$HS = 0.0091\frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}\left(1000 - x\frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}\right) =$$

$$\frac{9.1}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}} \cdot 1000\left(1 - \frac{x}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}\right) =$$

$$\frac{9.1}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}} \cdot 1000 \cdot \frac{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x} - x}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}} =$$

$$\frac{9.1}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}} \cdot 1000 \cdot \frac{-\frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}} =$$

$$1000\frac{-1 + 9.1Ce^{-9.1x}}{(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})^2}$$

$VS = HS$, $y = \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}$ er løsning av $y' = 0.0091y(1000 - xy)$

c) $x \to \infty \Rightarrow e^{-9.1x} \to 0 \Rightarrow \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}} \to \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1}} \to 0$

d) $y(0) = 1$ gir: $\frac{1000}{0 - \frac{1}{9.1} + Ce^{0}} = 1 \Leftrightarrow 1000 = C - \frac{1}{9.1} \Leftrightarrow$

$C = 1000 + \frac{1}{9.1} = 1000.1 \approx 1000$

Spesiell løsning: $y = \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + 1000e^{-9.1x}}$

e) $y' = 0 \Leftrightarrow 1000\frac{-1 + 9.1Ce^{-9.1x}}{(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})^2} = 0 \Leftrightarrow$ (Se 6a.)

$-1 + 9.1 \cdot 1000e^{-9.1x} = 0 \Leftrightarrow e^{-9.1x} = \frac{1}{9100} \Leftrightarrow$

$\ln e^{-9.1x} = \ln\frac{1}{9100} \Leftrightarrow x = \frac{\ln\frac{1}{9100}}{-9.1} \approx 1.00$

$y(1) = \frac{1000}{1 - \frac{1}{9.1} + 1000e^{-9.1}} \approx 998$

): Det var på det meste 998 syke etter 1 måned.

Til slutt, som en liten utfordring, skal vi løse differensialligningen direkte, og skriver den på formen:

$y' - 9.1y = -0.0091xy^2$

Dividerer vi med $-y^2$, får vi: (Hvis $y = 0$ har vi en triviell løsning $y = 0$.)

$-\frac{1}{y^2}y' + 9.1\frac{1}{y} = 0.0091x$

Så innfører vi en ny variabel $u = \frac{1}{y}$.

f) Forklar hvorfor $u' = -\frac{1}{y^2}y'$

Da kan vi skrive om ligningen til:
$u' + 9.1u = 0.0091x$

g) Løs denne differensialligningen.

h) Bytt ut u med $\frac{1}{y}$ og vis at $y = \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}$.

f) $u = \frac{1}{y} = y^{-1}$
Kjerneregel, med y som kjerne, gir: $u' = -y^{-2}y' = -\frac{1}{y^2}y'$

g) Integrerende faktor $IF = e^{\int 9.1dx} = e^{9.1x}$

$u'e^{9.1x} + 9.1ue^{9.1x} = 0.0091xe^{9.1x} \Leftrightarrow$
$(ue^{9.1x})' = 0.0091xe^{9.1x} \Leftrightarrow$
$ue^{9.1x} = 0.0091\int xe^{9.1x}dx$

Delvis integrasjon:
$\int xe^{9.1x} = x\frac{e^{9.1x}}{9.1} - \int\frac{e^{9.1x}}{9.1}dx = x\frac{e^{9.1x}}{9.1} - \frac{1}{9.1}\int e^{9.1x}dx =$
$\frac{1}{9.1}xe^{9.1x} - \frac{1}{9.1}\frac{e^{9.1x}}{9.1} + C_1 = \frac{1}{9.1}xe^{9.1x} - \frac{1}{9.1^2}e^{9.1x} + C_1$

Så vi får: $ue^{9.1x} = 0.0091(\frac{1}{9.1}xe^{9.1x} - \frac{1}{9.1^2}e^{9.1x} + C_1) \Leftrightarrow$
$u = 0.0091(\frac{1}{9.1}x - \frac{1}{9.1^2} + Ce^{-9.1x}) = \frac{0.0091}{9.1}(x - \frac{1}{9.1} + \frac{C_1}{9.1}e^{-9.1x}) =$
$\frac{1}{1000}(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})$

Generell løsning: $u = \frac{1}{1000}(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})$

h) $u = \frac{1}{y}$ gir $y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{1}{1000}(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})} = \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}$

Verdt å notere seg det generelle tilfellet:
$y' = ky(B - xy)$ har løsningen $\frac{B}{x - \frac{1}{kB} + Ce^{-kBx}}$.
Differensialligningen kan skrives:
$y' - kBy = -kxy^2$
Divisjon med $-y^2$ gir:
$-\frac{1}{y^2}y' + kB\frac{1}{y} = kx$
Variabelskiftet $u = \frac{1}{y}$, og $u' = -\frac{1}{y^2}y'$ gir da:
$u' + kBu = kx$, som kan løses med integrerende faktor:

$(ue^{kBx})' = kxe^{kBx} \Rightarrow ue^{kBx} = k\int xe^{kBx}dx$
$ue^{kBx} = \frac{x}{B}e^{kBx} - \frac{1}{kB^2}e^{kBx} + C_1$
$u = \frac{x}{B} - \frac{1}{kB^2} + C_1e^{-kBx}$

Og til slutt: $y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{x}{B}-\frac{1}{kB^2}+C_1e^{-kBx}} = \frac{B}{x-\frac{1}{kB}+Ce^{-kBx}}$