Heldagsprøve

Matematikk - R2

29. April 2009

Løsningsskisser

Ny versjon: 05.05.10

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = \sin(x)\ln(x)$

b) Deriver funksjonen $f(x) = 3(\sin x + 1)^2$

c) Bestem summen av rekken $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \ldots$

d) 1) Vis at $\frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{3x-1}{x^2-3x+2}$
2) Finn det ubestemte integralet $\int \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}\,dx$

e) Vinkelen v ligger i andre kvadrant og $\sin v = \frac{3}{5}$.
Finn ved *eksakte* verdier for $\cos v, \tan v$ og $\cos 2v$.

f) $f(x) = \frac{\ln^n x}{n}$
1) Vis at $f'(x) = \frac{\ln^{n-1} x}{x}$

2) Regn ut $\int_1^2 \frac{\ln^4 x}{x}\,dx$

g) Løs differensiallignigen $xy' + y = 0$, der $y(1) = 2$

h) Løs differensiallignigen $y'' + 2y' + 3y = 0$, der $y(0) = 0$ og $y'(0) = -1$

i)
En rekke er gitt ved $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = a_n + n - 1$, der $n \in \mathbb{N}$.

1) Bevis med induksjon at det generelle leddet er $a_n = \frac{n^2-3n+6}{2}$

2) Differansefølgen $d_n = a_{n+1} - a_n$ blir $d_n = n - 1$
Forklar hvorfor $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_n$.

3) Bruk 2) til å vise det samme som i 1): $a_n = \frac{n^2-3n+6}{2}$

a) Produktregel: $f'(x) = \cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x} = \ln x \cos x + \frac{1}{x}\sin x$

b) Kjerneregel: $f(x) = 3u^2, \quad u = \sin x + 1$

$$f'(x) = 6u \cdot (\cos x + 0) = 6(\sin x + 1)\cos x$$

c) Geometrisk rekke med $a_1 = 2, k = \frac{2}{3}$

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2\cdot 3}{3-2} = 6$$

d)

1) Polynomdivisjon: $x^2 + 0x + 1 = (x^2 - 3x + 2) = 1 + \frac{3x-1}{x^2-3x+2}$

2) $\int \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int (1 + \frac{3x-1}{x^2-3x+2})dx =$

$\int dx + \int \frac{5}{x-2}\,dx - \int \frac{2}{x-1}\,dx =$ (Delbrøkoppspaltning)

$x + 5\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + C = x + \ln\frac{|x-2|^5}{(x-1)^2} + C$

e) $\cos v = \pm\sqrt{1-\sin^2 v} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$

Andre kvadrant: $\cos v = -\frac{4}{5}$

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\cos(2v) = 1 - 2\sin^2 v = 1 - \frac{2\cdot 9}{25} = \frac{7}{25}$$

f)

1) Kjerneregel: $f(x) = \frac{1}{n}u^n, \quad u = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{n}nu^{n-1}\frac{1}{x} = \frac{\ln^{n-1}x}{x}$ *QED*

2) 1) gir oss: $\int \frac{\ln^{n-1}x}{x}\,dx = \frac{\ln^n x}{n} + C$

$n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$ og vi får: $\frac{\ln^5 x}{5} + C$

$$\int_1^2 \frac{\ln^4 x}{x}\,dx = {}_1^2\left[\frac{\ln^5 x}{5}\right] = \frac{\ln^5 2}{5} - 0 = \frac{\ln^5 2}{5} \approx 0.0320$$

g) Separabel:

$\int \frac{y'}{y}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \Leftrightarrow$

$y = C\frac{1}{x}$

Integrerende faktor: $y' + \frac{1}{x}y = 0, \quad IF = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

$(yx)' = 0 \Leftrightarrow yx = C \Leftrightarrow y = C\frac{1}{x}$

Eller direkte hvis man ser at venstre side er derivasjonen av et produkt:

$(xy)' = 0 \Leftrightarrow yx = C \Leftrightarrow y = C\frac{1}{x}$ (Generell løsning)

Initialbetingelse: $y(1) = 2 \Rightarrow 2 = C\frac{1}{1} \Leftrightarrow C = 2$

Spesiell løsning: $y = \frac{2}{x}$

h) Karakteristisk ligning: $r^2 + 2r + 3 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm i\sqrt{2}$

Generell løsning: $y = e^{-x}(C\sin(\sqrt{2}x) + D\cos(\sqrt{2}x))$

Initialbetingelser:

$y(0) = 0 \Rightarrow e^0(C\sin 0 + D\cos 0) = 0 \Leftrightarrow D = 0$

$y = e^{-x}C\sin\sqrt{2}\,x$ (Da $D = 0$)

$y' = e^{-x}(-1)C\sin\sqrt{2}\,x + e^{-x}C\sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,x =$ (Produktregel)
$e^{-x}(\sqrt{2}\,C\cos\sqrt{2}\,x - C\sin\sqrt{2}\,x)$

$y'(0) = -1 \Leftrightarrow -1 = e^0(\sqrt{2}\,C - 0) \Leftrightarrow -1 = \sqrt{2}\,C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Spesiell løsning:

$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x}\sin(\sqrt{2}\,x)$

i)

1) $n = 1$: $a_1 = \frac{1^2 - 3\cdot 1 + 6}{2} = 2$ *ok*

$n \to n+1$:

Må vise: $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 3(n+1) + 6}{2} = \frac{n^2 - n + 4}{2}$

$a_{n+1} = a_n + n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 6}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 6 + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 n + 4}{2}$ *QED*

2) Det $n$te leddet kan lages ved å starte med første ledd, a_1, og deretter legge til $n-1$ differanser til vi er kommet til a_n.

3) Differansene er en aritmetisk følge med $d_1 = 0, d_{n-1} = (n-1) - 1 = n - 2$
så summen blir:$S_{n-1} = (d_1 + d_{n-1})\frac{n-1}{2} = (0 + n - 2)(n-1)/2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$
Formelen i 2) gir da:
$a_n = a_1 + S_{n-1} = 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2 + 4}{2} = \frac{n^2 - 3n + 6}{2}$ *QED*

Oppgave 2

Et plan α skjærer koordinataksene i $A = (a,0,0), B = (0,b,0)$ og $C = (0,0,c)$.
a) Vis at ligningen for planet α blir: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

b) Finn avstanden h fra sideflaten ABC til O og bruk dette til å vise at
$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

a) $\overrightarrow{AB} = [-a,b,0]$, $\overrightarrow{AC} = [-a,0,c]$
Lager normalvektor:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = [bc, ac, ab]$$

$\overrightarrow{AP} = [x-a, y-0, z-0] = [x-a, y, z]$

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-a, y, z] \cdot [bc, ac, ab] = 0 \Leftrightarrow bcx - abc + acy + abz = 0 \Leftrightarrow$

$bcx + acy + abz = abc \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (Etter divisjon med abc.)

Alternativt:
Sett inn koordinatene til A, B og C og vise at disse tre punktene ligger i planet.

b)
Avstand: $h = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \left| \frac{[-a,0,0]\cdot[bc,ac,ab]}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}} \right| = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$

$\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} = \frac{abc}{h}$

Kvadrering gir: $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \frac{(abc)^2}{h^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$ *QED*
(Etter divisjon med $(abc)^2$.)

Del 2

Oppgave 3

Trekanten ABC har hjørner i $A(-1,2,0), B(2,1,-3)$ og $C(1,0,2)$. Sammen med punktet $D(5,3,7)$ danner trekanten pyramiden $ABCD$.
a) Finn vinkel $\angle A$ i ΔABC.
b) Finn arealet av ΔABC.

c) Finn parameterfremstillingen til en linje l gjennom C og D.

d) Finn ligningen for det planet α som inneholder A, B og C.

e) Finn ligningen for planet β gjennom A, C og D.

f) Finn vinkelen mellom grunnflaten ABC og sideflaten ACD.

g) Finn vinkelen mellom sidekanten DC og grunnflaten ABC.

h) Finn avstanden fra grunnflaten ABC til D.

i) Finn volumet av pyamiden.

j) Finn avstanden mellom sidekanten AB og sidekanten CD.

$A(-1,2,0), B(2,1,-3)$ og $C(1,0,2)$. Sammen med punktet $D(5,3,7)$
$\vec{AB} = [3,-1,-3]$, $\vec{AC} = [2,-2,2]$, $\vec{AD} = [6,1,7]$, $\vec{CD} = [4,3,5]$

a) $\cos\angle A = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{[3,-1,-3]\cdot[2,-2,2]}{\sqrt{3^2+1^2+3^2}\,2\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{2\sqrt{19}\sqrt{3}} \approx 0.1325$

$\angle A = 82.4^\circ$

b) $A_{ABC} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right\|}{2} = \frac{|[-8,-12,-4]|}{2} = \frac{4|-[2,3,1]|}{2} =$
$2\sqrt{2^2+3^2+1^2} = 2\sqrt{14} \approx 7.48$

c)

Retningsvektor: $\overrightarrow{CD} = [4,3,5]$
$[x,y,z] = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD} = [1,0,2] + t[4,3,5] = [4t+1, 3t, 5t+2]$
):

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4t+1 \\ y = 3t \\ z = 5t+2 \end{array} \right\}$$

d) Normalvektor:
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-8,-12,-4] = -4[2,3,1]$ (Se b).)

Velger: $\vec{n} = [2,3,1]$

Gjennom A: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-(-1), y-2, z-0] \cdot [2,3,1] = 0 \Leftrightarrow$
$2x+2+3y-6+z = 0 \Leftrightarrow 2x+3y+z-4 = 0$

e) Tilsvarende d):
$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = [2,-2,2] \times [6,1,7] = [-16,-2,14] = -2[8,1,-7]$

Velger: $\vec{n} = [8,1,7]$

$[x-(-1), y-2, z-0] \cdot [8,1,7] = 0 \Leftrightarrow 8x+8+y-2+7z = 0 \Leftrightarrow$
$8x+y+7z+6 = 0$

f) Vinkelen mellom normalvektoren til planene:

$\cos\gamma = \frac{[2,3,1]\cdot[8,1,-7]}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\sqrt{8^2+1^2+7^2}} \approx 0.3004$

$\gamma = 72.5^\circ$

g)

$\cos\delta = \frac{\overrightarrow{CD}\cdot[2,3,1]}{\left|\overrightarrow{CD}\right||[2,3,1]|} = \frac{[4,3,5]\cdot[2,3,1]}{\sqrt{50}\sqrt{14}} = \frac{22}{5\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{7}} = \frac{11}{5\sqrt{7}} = 0.8315$
$\delta = 33.7$
Søkt vinkel: $90^\circ - \delta = 56.3^\circ$

h)

Som projeksjon av $\overrightarrow{AD}$ på normalvektor:
$d = \left|\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{[6,1,7]\cdot[2,3,1]}{\sqrt{14}} = \frac{22}{\sqrt{14}} \approx 5.88$

i)

$$V_{ABCD} = \frac{ABC \cdot d}{3} = \frac{2\sqrt{14}\,22}{3\sqrt{14}} = \frac{44}{3} \approx 14.7$$

Eller: $\left| \frac{(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}}{6} \right| = \left| \frac{[-8,-12,-4] \cdot [6,1,7]}{6} \right| = \left| \frac{-88}{6} \right| = \frac{44}{3}$

j)
Vindskjeve linjer:

Projeksjonen av $\vec{AC} = [2,-2,2]$ (for eksempel...)
på vektor normalt på retningsvektorene $\vec{AB}$ og $\vec{CD}$:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{CD} = [3,-1,-3] \times [4,3,5] = [4,-27,13]$$

$$e = \left| \frac{\vec{AC} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{[2,-2,2] \cdot [4,-27,13]}{\sqrt{4^2+27^2+13^2}} = \frac{44}{457}\sqrt{914} = 2.9108 = \frac{88}{\sqrt{914}} \approx 2.91$$

Oppgave 4

Du skal svare på enten alternativ I eller alternativ II. I og II er likeverdige i vurderingen.

Alternativ I

En bjørnebestand utvikler seg etter den logistiske funksjonen

$$b(t) = \frac{400}{1+3e^{-0.4t}}, \quad t \in [0, \rightarrow\rangle \text{ [år]}$$

a) Hvor stor var bestanden i utgangspunktet?

b) Hvor stor blir bestanden i det lange løp?

c) Når øker bestanden mest?

d) Hva er den største veksthastigheten i bestanden?

e) Sett opp en differensialligning som har $b(t)$ som løsning. (Kall $b(t)$ for y.)

a)
$b(0) = \frac{400}{1+3e^0} = 100$ [bjørner]

b)
$\lim_{t\to\infty} \frac{400}{1+3e^{-0.4t}} = \frac{400}{1+0} = 400$ [bjørner]

c)
Som sagt, den logistiske funksjonen er symmetrisk om vendepunktet:

$$\frac{400}{1+3e^{-0.4t}} = \frac{400}{2} \Leftrightarrow 3e^{-0.4t} + 1 = 2 \Leftrightarrow e^{-0.4t} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\ln\frac{1}{3}}{-0.4} = \frac{\ln 1 - \ln 3}{-0.4} = \frac{\ln 3}{0.4} \approx 2.75$$

Bestanden øker mest i vendepunktet, dvs. etter ca. 3 år.

d)
Brøkregel: $f'(x) = \frac{0(1+3e^{-0.4t}) - 400(0+3e^{-0.4t}(-0.4))}{(1+3e^{-0.4t})^2} = \frac{480e^{-0.4t}}{(1+3e^{-0.4t})^2}$

Maksimal veksthastighet:

$$f'(2.75) = \frac{480e^{-0.4 \cdot 2.75}}{(1+3e^{-0.4 \cdot 2.75})^2} \approx 40 \text{ [bjørner/år]}$$

Alternativt:
Bruk differensialligningen (se e)):

$y' = 0.001y(400-y)$ for vendepunktet der $y = \frac{400}{2} = 200$:

$y'(x_{vp}) = 0.001 \cdot 200 \cdot (400-200) = 40$ [bjørner/år]

(Går uten å kjenne $x_{vp} = 2.75...$)

e)

Logistisk differensialligning med begrensning 400: $y' = ky(400-y)$

For å finne k, må vi finne y og y' for en t-verdi, velger $t = 0$:

$f'(0) = \frac{480e^0}{(1+3e^0)^2} = 30$

$f(0) = 100$

Dette gir ligningen: $30 = k \cdot 100 \cdot (400-100) \Leftrightarrow k = \frac{30}{100 \cdot 300} = \frac{1}{1000} = 0.001$

):

$y' = 0.001y(400-y)$ og en intialbetingelse, feks. $y(0) = 100$

Alternativ II

Med solhøyden mener vi tallet på grader mellom horisonten og solen. Solhøyden er derfor et mål for hvor høyt solen står på himmelen. Vi skal finne en funksjon på formen

$h(t) = a + b\cos(kt)$ [°], $t \in [0,24]$ [timer]

som gir solhøyden $h(t)$ målt i grader ved klokkeslett t.

a) Finn k.

b) Et sted måles solhøyden en dag til 2° kl. 24.00 og til 46° kl. 12.00.
Bestem funksjonsuttrykket til $h(t)$.

c) Når endrer solhøyden seg mest per tidsenhet?

d) Vis at $h(t)$ er en spesiell løsning av differensialligningen

$$y'' + k^2(y-a) = 0$$

a)

$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \approx 0.262$

b)

$h(0) = 2 \Leftrightarrow a + b\cos(0) = 2 \Leftrightarrow a + b = 2 \qquad (I)$

$h(12) = 46 \Leftrightarrow a + b\cos(\frac{\pi}{12}12) \Leftrightarrow a - b = 46 \qquad (II)$

$I + II$: $2a = 48 \Leftrightarrow a = 24$

Innsatt i I : $b = 2 - a = 2 - 24 = -22$

$$h(t) = 24 - 22\cos(\frac{\pi}{12}t)$$

c)

I vendepunktet, når $\cos(\frac{\pi}{12}t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow t = 6 + n12$

): Kl. 06.00 og kl. 18.00

d)

$y'' + k^2(y-a) = 0$

$h'(t) = -b\sin(kt)k = -kb\sin(kt)$
$h''(t) = -kb\cos(kt)k = -k^2b\cos(kt)$

$VS = h''(t) + k^2(h(t) - a) = -k^2b\cos(kt) + k^2(a + b\cos(kt) - a) = -k^2b\cos(kt) + k^2b\cos(kt) = 0$
QED

Oppgave 5

Når en bil kjører over en hump i veien, er det ønskelig at støtdemperne sørger for at den vertikale svingebevegelsen som oppstår, blir dempet mest mulig.Hvis massen til bilen er m, den samlede fjærkonstanten til støtdemperne k og dempningskonstanten i støtdemperne er q, vil den vertikale posisjonen $y = f(t)$ til bilen til enhver tid t i sekunder være gitt ved en løsning av differensialligningen

$$my'' + qy' + ky = 0$$

a)
En bil med masse $m = 1000$ kg kjører på en horisontal vei. Den samlede fjærkonstanten for de fire støtdemperne setter vi til $k = 1.0 \cdot 10^5$ N/m og dempningskonstanten til $q = 2.0 \cdot 10^4$ Ns/m.
Bilen kjører over en hump.
1) Finn det generelle uttrykket for posisjonen y til bilen etter t sekunder.
2) Tegn et par integralkurver.
3) Er støtdemperne gode?

b)
En gammel bil med masse $m = 1000$ kg kjører på en horisontal vei. Den samlede fjærkonstanten for de fire støtdemperne setter vi til $k = 1.0 \cdot 10^5$ N/m. Dempningskonstanten er her $q = 1.0 \cdot 10^4$ Ns/m.
1) Finn det generelle uttrykket for posisjonen y til bilen etter t sekunder.
2) Tegn et par integralkurver.
3) Bør støtdemperne skiftes?

a)
DL: $1000y'' + 20000y' + 100000y = 0 \Leftrightarrow y'' + 20y' + 100 = 0$
Karakteristisk ligning: $r^2 + 20r + 100 = 0 \Leftrightarrow (r + 10)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -10$

1) Generell løsning: $y = (C + Dt)e^{-10t}$

2)
Vi ser at $f(0) = C$, slik at C sier hvor stor utslag vi fikk for dumpen.
Hvis vi deriverer ser vi at D sier noe om hvor stor den deriverte er rett etter dumpen.
Tegn noen kurver for forskjellige verdier av C og D, slik at du har grunnlag for å si:

3)
Vi ser at uansett hvordan vi varierer C og D, så ser vi at y oppfyller standardkravene til en støtdemper på et motorkjøretøy:
-Ikke svinge forbi likevektspunktet, eller enda verre svinge forbi flere ganger.
-Tilbake til likevektspunktet etter maksimalt ett sekund
Stødemperne er derfor tilsynelatende "gode",
men; dette er ***kritisk*** dempning, så vi har ingen marginer,
hvis for eksempel dempningen blir dårligere pga. slitasje!

b)

DL: $1000y'' + 10000y' + 100000y = 0 \Leftrightarrow y'' + 10y' + 100 = 0$

Karakteristisk ligning: $r^2 + 10r + 100 = 0 \Leftrightarrow$

$$r = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{-300}}{2} = \frac{-10 \pm 10\sqrt{3}\,\sqrt{-1}}{2} = -5 \pm 5\sqrt{3}\,i \approx -5.00 \pm 8.66i$$

1) Generell løsning:

$$y = e^{-5t}(C\sin 8.66t + D\cos 8.66t)$$

2) Tegn noen kurver for forskjellige C og D.

3) Vi ser av kurvene i b)2) og av løsningsuttrykket i b) 1), at vi har svingninger, selv om de er dempede.

Systemet har ikke sluttet å svinge etter ett sekund og passerer likevektspunktet flere ganger, støtdemperne er med andre ord livsfarlige. Bilen må ikke kjøres før støtdemperne er skiftet.