R2 - Heldagsprøve våren 2013

Løsningsskisser

Viktigste oppsummeringer:

- Må skrive med penn på eksamen!
- Slurv og regnefeil, både med tall og bokstaver, er hovedproblemet.
  Beste måten å fikse dette på er å trene mer og sette av tid til
  kontroll av svar og utregninger på eksamen!
- Alle svar skal begrunnes/forklares:
  - Alltid formel før innsetting i formel
  - Alltid kort tekst som sier hva du gjør
  - Alltid skrive kommandoer man bruker i dataprogrammer og på lommeregner

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = 2e^{3x+1}$ 2) $g(x) = \ln x \cdot e^x$ 3) $h(x) = e^{-x}\sin(2x)$

1) Kjerneregel: $f(x) = 2e^u, \quad u = 3x+1$
$f'(x) = 2e^u \cdot 3 = 6e^{3x+1}$

2) Produktregel: $f'(x) = \frac{1}{x}e^x + \ln x \cdot e^x = e^x(\ln x + \frac{1}{x})$

3) Produktregel (og kjerneregel):
$f'(x) = -e^{-x}\sin 2x + e^{-x}\cos 2x \cdot 2 = e^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x)$

b) Bestem integralene:

1) $\int \frac{x}{1-5x^2}dx$ 2) $\int x\sin(x)\,dx$

1) Variabelskifte: $u = 1-5x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -10x \Leftrightarrow dx = -\frac{du}{10x}$
$\int \frac{x}{u}\frac{-1}{10x}du = -\frac{1}{10}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{10}\ln|u| + C = C - \frac{1}{10}\ln|1-5x^2|$

2) Delvis integrasjon med $u' = \sin x$ og $v = x$:
$\int x\sin(x)\,dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C =$
$\sin x - x\cos x + C$

c)

1) Vis at $(x\cos(\ln x))' = \cos(\ln x) - \sin(\ln x)$

2) Regn ut $\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)-\sin(\ln x)}{2}dx$

1) Produktregel (og kjerneregel):
$(x\cos(\ln x))' = \cos(\ln x) + x(-\sin(\ln x))\frac{1}{x} = \cos(\ln x) - \sin(\ln x)$ *QED*

2) $\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)-\sin(\ln x)}{2}dx = \frac{1}{2}{}_1^2[x\cos(\ln x)] = \frac{1}{2}(2\cos(\ln 2) - \cos(\ln 1)) =$
$\frac{1}{2}(2\cos(\ln 2) - 1) = \cos(\ln 2) - \frac{1}{2}$

d)
Løs differensiallignigen

$$y' = x - \frac{y}{x}, \qquad \text{der } y(1) = 5$$

Ikke separabel, men lineær:
$y' - \frac{1}{x}y = x, \qquad IF = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

$xy' - y = x^2 \Leftrightarrow (xy)' = x^2 \Leftrightarrow xy = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow$
$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ (Generell løsning)

Initialbetingelse:
$5 = \frac{1}{3} + \frac{C}{1} \Leftrightarrow C = \frac{14}{3}$

$y = \frac{x^2}{3} + \frac{14}{3x} = \frac{x^3+14}{3x}$ (Spesiell løsning)

e)
Gitt funksjonen $f(x) = e^{-x}\sin x$.

1) Hva må k være i differensiallignigen $y'' + 2y' + ky = 0$
hvis $f(x)$ skal være en spesiell løsning av differensiallignigen?

2) Hva må $y(0)$ og $y'(0)$ være for at $f(x)$ skal være en spesiell løsning
av differensiallignigen?

1) Produktregel:
$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$
$f''(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) =$
$-2e^{-x}\cos x$

Innsatt i DL:
$-2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + ke^{-x}\sin x = 0 \Leftrightarrow$
$e^{-x}(-2\cos x + 2\cos x - 2\sin x + k\sin x) = 0 \Leftrightarrow$
$e^{-x}(k-2)\sin x = 0 \Leftrightarrow$
$k = 2$ (Ikke løs for x, skal være oppfylt uansett x-verdi.)

2)
$y(0) = f(0) = e^0\sin 0 = 0$
$y'(0) = f'(0) = e^0(\cos 0 - \sin 0) = 1$

f)
Bruk induksjonsbevis til å bevise at $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, for alle $n \geq 2$.

$n = 2$:
$VS = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$HS = \frac{1}{2}$ $\qquad OK!$

$n \to n+1$:
Må vise at $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$
når vi antar at formelen over gjelder for n:

$VS = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n+1}) =$
$\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n}(\frac{n+1-1}{n+1}) = \frac{1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$
$HS = \frac{1}{n+1}$ $\qquad OK!$

g)
1) Gitt rekken $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots$
For hvilke verdier av x konvergerer denne rekken?
2) Løs ligningen $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots = \sqrt{2} + 1$

Du kan få bruk for tabellen:

x :	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$:	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

1)
Geometrisk rekke med $a_1 = \sin x$ og kvotient $k = \sin x$
Konvergens når: $-1 < \sin x < 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
(Konvergens for alle x unntatt $\frac{\pi}{2} + k\pi$)

2)
$VS = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\sin x}{1-\sin x}$, så ligningen blir $\frac{\sin x}{1-\sin x} = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow$
$\sin x = (\sqrt{2}+1)(1-\sin x) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}\sin x - \sin x \Leftrightarrow$
$\sin x(1 + \sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2} \Leftrightarrow$
$\sin x = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} = \frac{2+\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2}{2-4} = \frac{-\sqrt{2}}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

h)
Gitt vektorene $\vec{u} = [2,3,1]$, $\vec{v} = [-1,2,4]$ og $\vec{w} = [2,3,6]$. Regn ut:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

2) $\vec{u} \times \vec{v}$

3) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

4) Gi en kort forklaring på hva utregningene i 1), 2) og 3) kan brukes til.

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = [2,3,1] \cdot [-1,2,4] = 2(-1) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = -2 + 6 + 4 = 8$
Skalarprodukt kan brukes til å sjekke om to vektorer står normalt på hverandre.
(Inngår også i utregninger av vinkel mellom to vektorer, lengde og projeksjoner.)

2) $\vec{u} \times \vec{v} = [2,3,1] \times [-1,2,4] = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = [10,-9,7]$

Vektorprodukt kan brukes til å sjekke om to vektorer er parallelle.
(Inngår også i utregninger av areal utspent av to vektorer, konstruksjon av normalvektorer og i volumberegninger for parallellepipeder og pyramider. Se 3).)

3) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = ([2,3,1] \times [-1,2,4]) \cdot [2,3,6] =$
$[10,-9,7] \cdot [2,3,6] = 10 \cdot 2 + (-9)3 + 7 \cdot 6 = 35$

Volumproduktet brukes til å regne ut volumet av et parallellepiped utspent av de tre vektorene. (Eventuelt pyramider).

Utregningen kan også brukes til å sjekke om tre vektorer ligger i samme plan, da volumproduktet i så fall blir 0.

Del 2 - Med hjelpemidler

Oppgave 2

Et lodd med massen $m = 0.5$ kg svinger i en fjær med fjærstivheten $k = 4$ N/m.
Dempningsfaktoren er $l = 0.5$ Ns/ṁ.
Vi holder i utgangspunktet loddet i ro 0.5 m fra likevektsstillingen,
før vi slipper loddet ved tidspunktet $t = 0$ [s].

a) Utled differensialligningen for utslaget y fra likevektsstillingen ved hjelp av Newtons andre lov.

b) Løs differensialligningen.

c) Hva blir svingetiden?

d) Lag en skisse av grafen til y.

e) Finn toppunktene til y.

Oppgaven burde oppgitt tallene som 0.500 og 4.00 for å markere antall gjeldende siffer. Uansett så er det naturlig å bruke avrundede desimaltall i en slik praktisk oppgave.

a) Tegn figurer omtrent som i læreboken på side 303!

Newtons andre lov: $\sum F = ma$

$mg - ly' - k(y + y_0) = my''$

$my'' + ly' + ky = mg - ky_0$ der $mg - ky_0 = 0$

): $my'' + ly' + ky = 0 \Leftrightarrow 0.5y'' + 0.5y' + 4y = 0 \Leftrightarrow$

$y'' + y' + 8y = 0$

b) Karakteristisk ligning: $r^2 + r + 8 = 0 \Leftrightarrow$
$$r = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{31}}{2} i \approx -0.500 \pm 2.78i$$

Generell løsning:
$$y(t) = e^{-0.5t}(A\sin 2.78t + B\cos 2.78t) \ \text{[m]}, \qquad t \in [0, \infty\rangle \ \text{[s]}$$

$$y' = -0.5e^{-0.5t}(A\sin 2.78t + B\cos 2.78t) + e^{-0.5t}(2.78A\cos 2.78t - 2.78B\sin 2.78t) =$$
$$e^{-0.5t}((-0.5A - 2.78B)\sin 2.78t + (-0.5B + 2.78A\cos 2.78t)$$

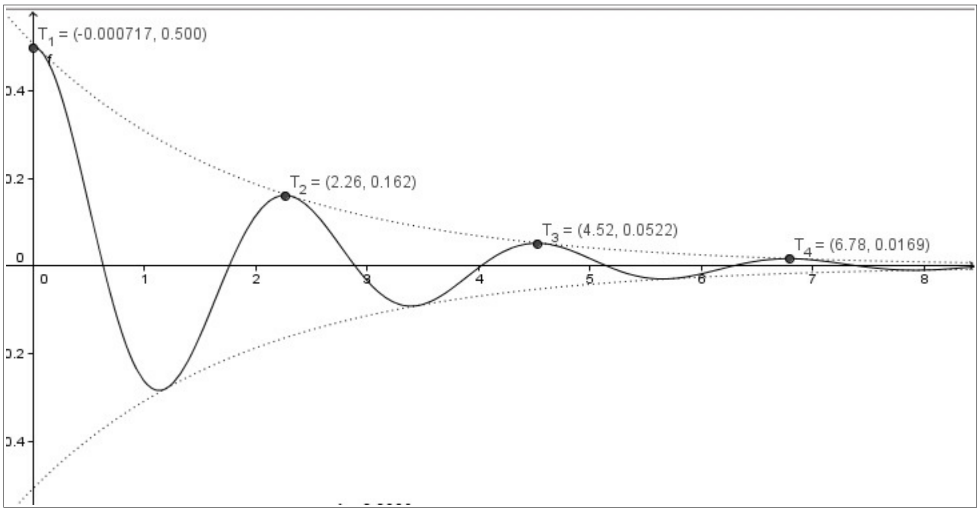
Initialbetingelser:
$$y(0) = 0.5 \Leftrightarrow 0.5 = e^0(A\sin 0 + B\cos 0) \Leftrightarrow B = 0.5$$

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = e^0((-0.5A - 2.78B)\sin 0 + (-0.5B + 2.78A)\cos 0) \Leftrightarrow$$
$$-0.5B + 2.78A = 0 \Leftrightarrow A = \tfrac{0.5 \cdot 0.5}{2.78} \approx 0.0898$$

Spesiell løsning:
$$y(t) = e^{-0.5t}(0.0898\sin 2.78t + 0.5\cos 2.78t) \ \text{[m]}, \quad t \in [0, \infty\rangle \ \text{[s]}$$

c) Svingetid gitt av: $2.78 = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{2.78} \approx 2.26$ [s]

d) Skisse/Graf:



e) Fra a):
$$y' = e^{-0.5t}((-0.5A - 2.78B)\sin 2.78t + (-0.5B + 2.78A)\cos 2.78t) =$$
$$e^{-0.5t}(-1.43\sin 2.78t + 0.000356\cos 2.78t)$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow -1.43\sin 2.78t + 0.000356\cos 2.78t = 0 \Leftrightarrow$$
$$\tan 2.78t = \tfrac{0.000356}{1.43} \Leftrightarrow \tan 2.78t = 0.000249 \Leftrightarrow$$
$$2.78t = 0.000249 + k\pi \Leftrightarrow t \approx 0 + k1.13$$

Topp-punkter for $k = 0, 2, 4, 6, \ldots$
$$t = 0, \qquad t = 2.26, \qquad t = 4.52, \qquad t = 6.78, \ldots$$
):
$$(0, 0.5), \qquad (2.26, 0.162), \qquad (4.52, 0.0522), \qquad \ldots$$

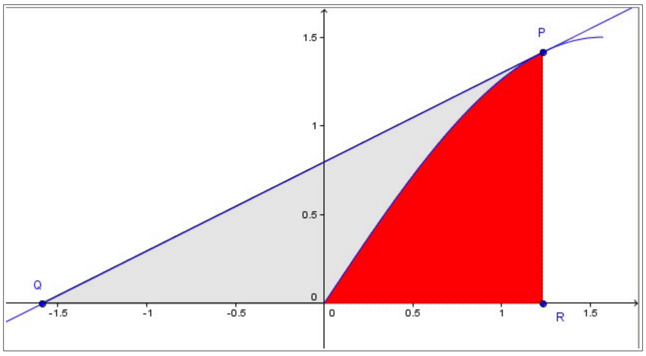
(Mye arbeid, kan bruke Ektremalpunkt[funksjon,fra, til] i GeoGeBra.)

Kan være en ide å regne ut den deriverte en gang for alle generelt og ha i sin private formelsamling:

$$y = e^{\alpha t}(A\sin\beta t + B\cos\beta t)$$
$$y' = \alpha e^{\alpha t}(A\sin\beta t + B\cos\beta t) + e^{\alpha t}(A\beta\cos\beta t - B\beta\sin\beta t) =$$
$$e^{\alpha t}(\alpha A\sin\beta t + \alpha B\cos\beta t + A\beta\cos\beta t - B\beta\sin\beta t) =$$
$$e^{\alpha t}((\alpha A - \beta B)\sin\beta t + (\alpha B + \beta A)\cos\beta t)$$

Da får vi $y(0) = B$ og $y'(0) = \beta A + \alpha B$

Oppgave 3



Skissen ovenfor viser grafen til funksjonen $f(x) = A\sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Tangenten T til grafen i punktet $P(a, f(a))$ er også tegnet inn og skjærer x-aksen i punktet Q. Punktet R er i $(a, 0)$.

a) Vis at ligningen til tangenten er gitt ved: $T : y = (A\cos a)x - A(a\cos a - \sin a)$

b) Bestem koordinatene til Q ved regning.

c) Vis ved regning at arealet avgrenset av grafen til $f(x)$ og x-aksen, fra Origo til R blir $A(1 - \cos a)$.

d) Grafen til $f(x)$ deler trekanten ΔQRP i to områder. Bestem ved regning a slik at disse to områdene blir like store.

a) Ett-punkts-formelen $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ gir:

T :
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$
$$y - A\sin a = A\cos a(x - a)$$
$$y = A\cos a\, x - aA\cos a + A\sin a$$
$$y = A\cos a\, x + A(\sin a - a\cos a)$$
eller
$$y = A\cos a\, x - A(a\cos a - \sin a) \qquad QED$$

b) Q : $\quad y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{A(\sin a - a\cos a)}{A\cos a} = a - \tan a$

): $\quad Q = (a - \tan a, 0)$

c) $A_f = \int_0^a A\sin x dx = A\left[\ -\cos x\ \right]_0^a = A(-\cos a - (-\cos 0)) =$

$A(1-\cos a) \qquad QED$

d) $A_{QRP} = \frac{gh}{2} = \frac{(a-(a-\tan a))A\sin a}{2} = \frac{A\tan a \sin a}{2}$ (eller $\frac{\sin^2 a}{2\cos a}$)

Krav: $A_{QRP} - A_f = A_f \Leftrightarrow 2A_f = A_{QRP} \Leftrightarrow$

$2A(1-\cos a) = \frac{A\tan a \sin a}{2} \Leftrightarrow 4 - 4\cos a = \frac{\sin^2 a}{\cos a} \Leftrightarrow$

$4 - 4\cos a = \frac{1-\cos^2 a}{\cos a} \Leftrightarrow 4\cos a - 4\cos^2 a = 1 - \cos^2 a \Leftrightarrow$

$3\cos^2 a - 4\cos a + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\cos a = 1 \vee \cos a = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$a = 0 + k2\pi \vee a \approx 1.23 + k2\pi$

$a = 0$ er triviell løsning når alt klapper sammen.
Eneste løsning i $[0, \frac{\pi}{2}]$ er: $a = 1.23$

Oppgave 4

Gitt punktene $S(1,2,0)$ og $P(1,8,0)$.

a) Finn parameterfremstillingen for en linje l gjennom S og P.

b) Finn avstanden fra punktet $A(-5,4,6)$ til linjen l.

c) Finn ligningen for en kuleflate α med sentrum i S og som går gjennom punktet P.

d) Linjen l skjærer åpenbart kuleflaten α i punktet P. Finn det andre skjæringspunktet Q mellom linjen l og kuleflaten α.

e) Finn ligningen for planet β som tangerer kuleflaten α i punktet P.

f) Finn avstanden fra punktet A til tangeringsplanet β.

g) Et annet plan γ ligger mellom punktene S og P og er parallelt med planet β.
Planet γ har avstanden $d = 2$ fra punktet P.
Finn ligningen for planet γ.

h) Regn ut radius i skjæringssirkelen mellom kuleflaten α og planet γ.

a) $\overrightarrow{SP} = [0,6,0]$
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + t\overrightarrow{SP} \Leftrightarrow [x,y,z] = [1,2,0] + t[0,6,0] \Leftrightarrow$

$$l: \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 + 6t \\ z = 0 \end{array} \right\} \quad \text{(eller} \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 + s \\ z = 0 \end{array} \right\} \text{der } s = 6t.)$$

b)
$\overrightarrow{SA} = [-6,2,6] \qquad |\overrightarrow{SA}|^2 = 76$
$|\overrightarrow{SP}| = 6$
$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SA} = 12$
Avstand:

$$d_{Al} = \frac{\text{Areal utspent av } \overrightarrow{SP} \text{ og } \overrightarrow{SA}}{\text{grunnlinje}} = \frac{|\overrightarrow{SP}\times\overrightarrow{SA}|}{|\overrightarrow{SP}|} =$$

$$\frac{\sqrt{|\overrightarrow{SP}|^2\,|\overrightarrow{SA}|^2-(\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SA})^2}}{|\overrightarrow{SP}|} = \frac{\sqrt{76\cdot 6^2-12^2}}{6} = 6\sqrt{2} \approx 8.49$$

Eventuelt:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{|\overrightarrow{SP}|} = \frac{|[36,0,36]|}{6} = \frac{36|[1,0,1]}{6} = 6|[1,0,1]|= 6\sqrt{2}$$

c) Radius: $R = \left|\overrightarrow{SP}\right|$ og sentrum: $S = (1,2,0)$ gir oss:

$\alpha : (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 6^2$

(Eller $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 = 31$)

d) P gitt av $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP}$ så punkt Q på motsatt side gitt av:

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{SP} = [1,2,0] - [0,6,0] = [1,-4,0]$

): $Q = (1,-4,0)$

e) Normalvektor: $\vec{n} = \overrightarrow{SP} = [0,6,0]$

(Kunne også valgt $\vec{n} = \frac{1}{6}\overrightarrow{SP} = \frac{1}{6}[0,6,0] = [0,1,0]$...)

Plan med $\vec{n}$ gjennom punktet $P(1,8,0)$:

$[x-1, y-8, z-0] \cdot [0,6,0] = 0 \Leftrightarrow 6y - 48 = 0$

): $\beta : \quad y - 8 = 0$

f) Avstand (projeksjon av $\overrightarrow{PA}$ på $\vec{n}$:

$$d_{A\beta} = \frac{\left|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{SP}\right|}{\left|\overrightarrow{SP}\right|} = \frac{|[-6,-4,6]\cdot[0,6,0]|}{6} = \frac{|-24|}{6} = 4$$

g) Går til nytt punkt R i det nye planet fra$P$ langs $\overrightarrow{SP}$:

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - 2\vec{e} = \overrightarrow{OP} - 2\frac{1}{SP}\overrightarrow{SP} =$

$[1,8,0] - 2\frac{1}{6}[0,6,0] = [1,6,0]$

): $R = (1,6,0)$

$\gamma : \quad [x-1, y-6, z-0] \cdot [0,6,0] = 0 \Leftrightarrow$

$6y - 36 = 0 \Leftrightarrow y - 6 = 0$

h) En god figur og Pythagoras gir:

$r^2 + (R_\alpha - 2)^2 = R_\alpha^2 \Leftrightarrow r^2 + (6-2)^2 = 6^2 \Leftrightarrow$

$r = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$ (Negativ løsning forkastes.)

Oppgavene e), f), g) og h) kan sees direkte med en god figur,

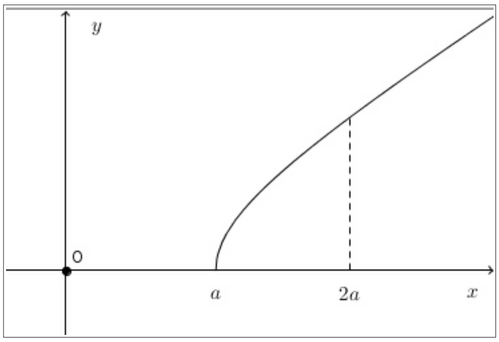
da tallene og posisjonene til planene er såpass enkle og oversiktlige!
Dette skulle gi gode kontrollmuligheter og små muligheter for feil!

Oppgave 5

En hyperbel er gitt ved ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hvis vi dreier den øvre og høyre delen, mellom $x = a$ og $x = 2a$, 360° om x-aksen, får vi et omdreiningslegeme som vi kaller hyperboloide.



a) Vis at ligningen for hyperbelen kan omformes til $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$.

b) Bruk integrasjon til å regne ut volumet av den delen av hyperboloiden som ligger mellom $x = a$ og $x = 2a$.

a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 = y^2 \Leftrightarrow$
$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 \qquad QED$

b) $V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2)dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_a^b (x^2 - a^2)dx =$

$\pi \frac{b^2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3} - a^2 x \right]_a^{2a} = \pi \frac{b^2}{a^2}(\frac{8a^3}{3} - 2a^3 - (\frac{a^3}{3} - a^3)) =$
$\pi \frac{b^2}{a^2}(\frac{7a^3}{3} - a^3) = \pi \frac{b^2}{a^2}\frac{4a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi ab^2$

Oppgave 6

Vi ønsker å finne summen av rekken $a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n$ og skriver derfor rekken på denne måten:

$$\begin{aligned} a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n &+ \\ a^2 + a^3 + \ldots + a^n &+ \\ a^3 + \ldots + a^n &+ \\ \ldots & \\ a^n & \end{aligned}$$

a) Forklar hvorfor summen blir:

$$S = a\frac{a^n-1}{a-1} + a^2\frac{a^{n-1}-1}{a-1} + a^3\frac{a^{n-2}-1}{a-1} + \ldots + a^{n-1}\frac{a^2-1}{a-1} + a^n\frac{a-1}{a-1}$$

b) Vis at summen kan forenkles til formelen:

$$S = \frac{1}{(a-1)^2}(na^{n+2} - (n+1)a^{n+1} + a)$$

a) Leddene i uttrykket

$$S = a\frac{a^n-1}{a-1} + a^2\frac{a^{n-1}-1}{a-1} + a^3\frac{a^{n-2}-1}{a-1} + \ldots + a^{n-1}\frac{a^2-1}{a-1} + a^n\frac{a-1}{a-1}$$

er summene rad for rad.
Hver rad er en geometrisk rekke så vi kan bruke formelen

$$a_1\frac{k^n-1}{k-1}$$

på hver rad, der første ledd blir $a, a^2, a^3, \ldots$ og antall ledd blir $n, n-1, n-2, \ldots$

b) Faktorisering med felles faktor og litt rydding i ledd gir:

$$S = a\frac{a^n-1}{a-1} + a^2\frac{a^{n-1}-1}{a-1} + a^3\frac{a^{n-2}-1}{a-1} + \ldots + a^{n-1}\frac{a^2-1}{a-1} + a^n\frac{a-1}{a-1} =$$
$$\frac{a}{a-1}(a^n - 1 + aa^{n-1} - a + a^2a^{n-2} - a^2 + \ldots + a^{n-1}a - a^{n-1}) =$$
$$\frac{a}{a-1}(a^n + aa^{n-1} + a^2a^{n-2} + \ldots + a^{n-1}a - 1 - a - a^2 - \ldots - a^{n-1}) =$$
$$\frac{a}{a-1}((a^n + a^n + a^n + \ldots + a^n) - (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}) =$$
$$\frac{a}{a-1}(na^n - 1\frac{a^n-1}{a-1}) = \frac{a}{(a-1)^2}(na^n(a-1) - a^n + 1) =$$
$$\frac{a}{(a-1)^2}(na^{n+1} - (n+1)a^n + 1) =$$
$$\frac{1}{(a-1)^2}(na^{n+2} - (n+1)a^{n+1} + a) \qquad QED$$