R2 - Funksjoner, integrasjon og trigonometri

Løsningsskisser

Del I - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Regn ut integralene:

a) $\int x\cos x\,dx$ b) $\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx$ c) $\int e^x\cos(e^x)\,dx$

a) Delvis integrasjon: $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$

b) Delbrøkoppspalting: $\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{x}{(x-1)(x-2)}dx = \int(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1})dx =$
$2\ln|x-2| - \ln|x-1| + C_1 = \ln\frac{(x-2)^2}{|x-1|} + \ln C = \ln(C\frac{(x-2)^2}{|x-1|})$

c) Variabelskifte: $u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$ gir:
$\int e^x\cos(e^x)\,dx = \int e^x\cos(u)\frac{du}{e^x} = \int\cos(u)du = \sin(u) + C =$
$\sin(e^x) + C$

Oppgave 2

Løs ligningene når $x \in [0, 2\pi\rangle$:

a) $\tan(2x+1) = \sqrt{3}$ b) $\tan(x)\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$

c) $\tan^2(x) - \sqrt{3}\tan(x) = \sqrt{3} - \tan(x)$
(Hint: På den siste kan du få bruk for: $4 + 2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$)

a) $2x + 1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi-3}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi-3}{6} + k\frac{\pi}{2}$
$L = \{\frac{\pi-3}{6}, \frac{4\pi-3}{6}, \frac{7\pi-3}{6}, \frac{10\pi-3}{6}\}$

b) Betingelse: $\cos x \neq 0$
Enten: $\tan(x)(\sin(x) - \cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \tan(x) = 0 \lor \tan(x) = 1$
Eller: $\tan(x)\sin(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x)(\tan(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\sin(x) = 0 \lor \tan(x) = 1$
Eller: $\tan(x)\tan(x) = \tan(x)$ (dividerer med $\cos x$, som ikke er null)
$\tan(x)(\tan(x) - 1)$
$\tan(x) = 0 \lor \tan(x) = 1$

$L = \{0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}\}$

c) Enklest: $\tan(x)(\tan(x) - \sqrt{3}) = -(\tan(x) - \sqrt{3}) \Leftrightarrow$
$\tan(x)(\tan(x) - \sqrt{3}) + (\tan(x) - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$
$(\tan(x) + 1)(\tan(x) - \sqrt{3}) = 0$

$\tan(x) = -1 \vee \tan(x) = \sqrt{3}$

$L = \{\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\}$

Uten direkte faktorisering, som vist over, må vi trekke sammen og bruke abc-formel og hintet $4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$:

$u^2 + (1 - \sqrt{3})u - \sqrt{3} = 0, \qquad u = \tan(x)$

$u = \frac{-(1-\sqrt{3})\pm\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+4\sqrt{3}}}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{1-2\sqrt{3}+3+4\sqrt{3}}}{2} =$

$\frac{-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}\pm(1+\sqrt{3})}{2}$

): $u = \sqrt{3} \vee u = -1 \Leftrightarrow \tan(x) = \sqrt{3} \vee \tan(x) = -1$

Oppgave 3

En funksjon f er gitt ved: $f((x) = \cos(2x) - 1, \qquad D_f = \langle 0, 12\rangle$

a) Hva er perioden til f ?

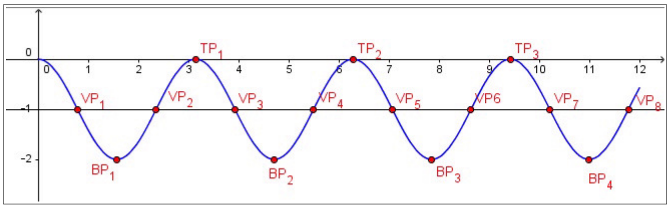
b) Bestem null-, topp-, bunn- og vendepunkter til f.

c) Finn vendetangenten til vendepunktet nærmest y-aksen.

a) Periode gitt av: $\qquad T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

b) $f(x)$ svinger dobbelst så fort som $\cos(x)$ og er flyttet en enhet nedover, med likevektslinje: $y = -1$

Graf:



En graf-skisse, som over, viser alle interessante punkter, dette er en sinus-svingning og det er derfor ikke nødvendig å derivere for å finne ekstremalpunkter eller vendepunkter!
Vi *vet* at alle ekstremalpunktene er der $\cos(2x) = \pm 1$ og vi *vet* alle vendepunktene ligger på likevektslinjen med innbyrdes avstand lik en halv periode $\frac{\pi}{2}$!

Nullpunkter: $\cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 + k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi$

): $x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = 3\pi$

Toppunkter: $2x = 0 + k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi \qquad$ (Der $\cos(2x) = 1$)

): $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$ og $(3\pi, 0)$ $\qquad$ (Punkter! Se side 142!)

Bunnpunkter: $2x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad$ (Der $\cos(2x) = -1$)

): $(\frac{\pi}{2}, -2)$, $(\frac{3\pi}{2}, -2)$, $(\frac{5\pi}{2}, -2)$ og $(\frac{7\pi}{2}, -2)$

Vendepunkter: $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ (Der $\cos(2x) = 0$)

): $(\frac{\pi}{4}, -1)$, $(\frac{3\pi}{4}, -1)$, $(\frac{5\pi}{4}, -1)$, $(\frac{7\pi}{4}, -1)$,
$(\frac{9\pi}{4}, -1)$, $(\frac{11\pi}{4}, -1)$, $(\frac{13\pi}{4}, -1)$ og $(\frac{15\pi}{4}, -1)$

c) $f'(x) = -\sin(2x)2 = -2\sin(2x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = -2\sin(\frac{\pi}{2}) = -2$

Ett-punkts-formelen: $y - (-1) = -2(x - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow$

Vendetangent: $y = -2x + \frac{\pi - 2}{2}$

Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$, $D_f = [0, 2\pi\rangle$

a) Vis at $f(x)$ kan skrives $\sqrt{2}\,\sin(x - \frac{\pi}{4})$.

b) Løs ligningen $\sin(x) - \cos(x) = 1$.

c) Finn arealet avgrenset av $f(x)$ og funksjonen $g(x) = 1$.

a) Formel: $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, $\tan\varphi = \frac{b}{a} = -1, \varphi$ i 4de kvadrant
gir: $f(x) = \sqrt{2}\,\sin(x + \frac{7\pi}{4})$ eller $f(x) = \sqrt{2}\,\sin(x - \frac{\pi}{4})$ *QED*

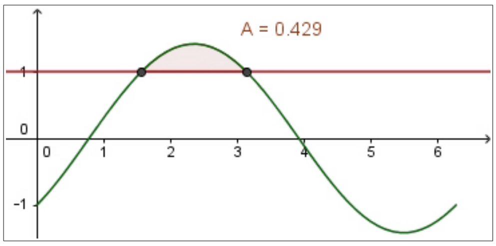
b) $\sin(x) - \cos(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\,\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$
$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$

$L = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$

c) Areal: $A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(x) - g(x))dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sqrt{2}\,\sin(x - \frac{\pi}{4}) - 1)dx =$

(Eller: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x - 1)dx$)

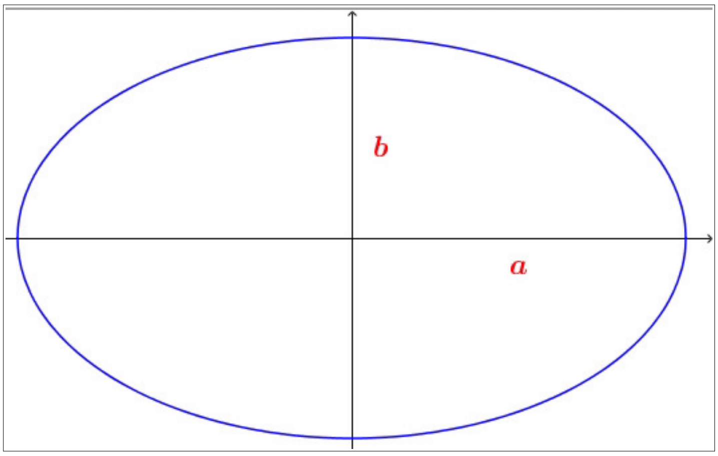
$\left[-\sqrt{2}\,\cos(x - \frac{\pi}{4}) - x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$
$-\sqrt{2}\,\cos(\frac{3\pi}{4}) - \pi - (-\sqrt{2}\,\cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{2}) =$
$-\sqrt{2}\,(-\frac{1}{\sqrt{2}}) - \pi + \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}$



Del II - Med hjelpemidler

Oppgave 5

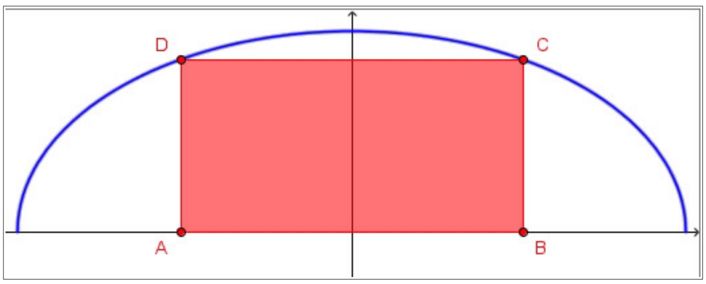
En ellipse har ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ og ser slik ut:



a og b kalles halvakser og vi legger merke til at grafen til ellipsen skjærer koordinataksene i $(a, 0)$, $(0, b)$, $(-a, 0)$ og $(0, -b)$.

a) Forklar at den delen av ellipsen som ligger over x-aksen er grafen til funksjonen
$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

b) Vi definerer et rektangel $ABCD$ der punktene $A(-c, 0)$ og $B(c, 0)$ ligger på x-aksen og punktene C og D ligger på $f(x)$, slik som vist i figuren:



Bestem hva c må være for at arealet av rektanglet $ABCD$ skal bli størst mulig.

c) Dreier vi grafen til $f(x)$ 360° om x-aksen, får vi en ellipsoide.
Vis at formelen for volumet av ellipsoiden er $V = \frac{4\pi ab^2}{3}$.

a) $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y}{b} = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Leftrightarrow \frac{y}{b} = \pm\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}} \Leftrightarrow$
$\frac{y}{b} = \pm\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

): Øvre del: $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

b) Grunnlinje: $AB = c - (-c) = 2c$
Høyde: $BC = f(c) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$
Areal: $A(x) = 2cf(c) = 2\frac{bc}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$

1	(x/a)^2+(y/b)^2=1 → $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$
2	Løs[$1,y] → $\left\{y = -\sqrt{a^2 - x^2}\ \lvert a\rvert\ \frac{\lvert b\rvert}{a^2}, y = \sqrt{a^2 - x^2}\ \lvert a\rvert\ \frac{\lvert b\rvert}{a^2}\right\}$
3	A(c):=2 b c/a sqrt(a^2-c^2) → $A(c) := 2\ b\ c\ \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$
4	A'(c)=0 Løs: $\left\{c = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \lvert a\rvert, c = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \lvert a\rvert\right\}$

Størst rektangelareal hvis $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$

c) Volum ellipsoide: $V = \pi\int_{-a}^{a} f^2(x)dx = \pi\int_{-a}^{a} f^2(x)dx$

1	f(x):=b/a sqrt(a^2-x^2) → $f(x) := b\ \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$
2	V:=pi Integral[f^2,-a,a] → $V := \frac{4}{3}\ a\ b^2\ \pi$

Oppgave 6

En rett linje l går gjennom $A(0, r)$ og $B(h, R)$.

a) Vis at linjen l har funksjonsuttrykket $l(x) = \frac{R-r}{h}x + r$.

b) Linjestykket AB roteres 360° om x-aksen og vi får da et omdreiningslegeme som er en såkalt avkortet kjegle.
Finn et uttrykk for volumet av omdreiningslegemet uttrykt ved r, R og h.

a) Signingstall: $st = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{R-r}{h-0} = \frac{R-r}{h}$
Da $A = (0, r)$ er skjæring med y-akse, har vi: $l(x) = \frac{R-r}{h}x + r$ *QED*

b)

1	l(x):=(R-r)/h x+r $\rightarrow\ \mathrm{l(x)} := \mathrm{x}\ \frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{h}} + \mathrm{r}$
2	V:=pi Integral[l^2,0,h] $\rightarrow\ \mathrm{V} := \pi \left(\frac{1}{3}\ \mathrm{h\,r}^2 + \frac{1}{3}\ \mathrm{R}^2\,\mathrm{h} + \frac{1}{3}\ \mathrm{R\,h\,r}\right)$

Eller: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

Oppgave 7

En fallskjermhopper som hoppet ut fra et fly hadde konstant fart 50 m/s
da han utløste fallskjermen. Farten utviklet seg videre slik det er vist i denne tabellen:

t [s]:	0	1	2	3	4
v [m/s]:	50	21	14	11	10

a) Bruk kurvetilpasning i GeoGebra til å vise at funksjonsuttrykket
$v(t) = 7.9\frac{1+0.73e^{-0.48t}}{1-0.73e^{-0.48t\pm}}$, basert på den teoretiske modellen $v(t) = a\frac{1+b\,e^{-kt}}{1-b\,e^{-kt}}$,
er en god modell for utviklingen av farten etter at fallskjermen ble utløst.

b) Regn ut $v'(0)$ og forklar hva denne verdien representerer .

c) Etter en stund stabiliserte farten seg. Hva var farten da?

d) Fallskjermhopperen nådde bakken etter 2 minutter.
Hvor høyt over bakken var han da fallskjermen ble utløst?

a) Legger inn tabellen i regneark og lager Liste1 med punktene.
Definerer en testfunksjon $test(x) = a\frac{1+b\,e^{-kx}}{1-b\,e^{-kx}}$ med kommandoen:
test(x)=a (1+b exp(-k x))/(1-b exp(-k x))

Justerer gliderne a, b og k til det stemmer nogenlunde med punktene.

Kurvetilpasning med: v(x)= Reg[Liste1, test]

Gir $v(t) = 7.9\frac{1+0.73e^{-0.48t}}{1-0.73e^{-0.48t\pm}}$ som angitt i oppgaven.

(RKvadrat[Liste1,v] er lik 1.000 så dette er en god kurvetilpasning.)

1	v'(0) $\approx\ -73.49$
2	Grenseverdi[v, inf] $\approx\ 7.89$
3	s:=Integral[v,0,120] $\approx\ \mathrm{s} := 989.64$

b) $v'(0) = -73$ m/s^2 er momentanakselerasjonen idet fallskjermen utløses.
(Farten avtar altså med over 70 m/s det første sekundet.

Sånn sett er modellen ikke så god helt i starten, dette er jo over 7g i utgangspunktet og ville nok være i overkant brutal nedbremsing for et menneske.)

c) Farten stabiliserer seg da $t \to \infty \Rightarrow e^{-kt} \to 0 \Rightarrow v(t) \to 7.9$ [m/s]

d) Da farten er den deriverte av veilengden; $v(t) = s'(t)$, har vi at veilengden er $s(t) = \int_0^t v(t)dt$, så etter 120 sekunder har han falt

$$s = \int_0^{120} v(t)dt \approx 990 \text{ [m]}$$
