Plan for fagdag 3

R2 - 18.11.10

Plan:

- Litt om differanse- og summefølger.
- Sammenhengen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$.
- Geometriske resonnement.
- Arbeidsoppgaver.

Differanse- og summefølger

Regresjon med lommeregner

Differanser er ofte nyttige selv om følgen ikke er aritmetisk, så la oss generalisere litt:

Vi ser på a_n : $0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$

og lager oss en tabell for å få oversikt:

Differanser av differanser: $D^{(2)}(a_n)$	2	2	2	2	2	$\ldots$		
Differanser: $D(a_n)$	2	4	6	8	10	12	$\ldots$	
Følge: a_n :	0	2	6	12	20	30	42	$\ldots$
Sum: $A_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$:	0	0	2	8	20	40	70	112

Dette var interessant!
Differansene er en lineær funksjon (første grad)
Differansene av differansene er en konstant funksjon (0te grad)

Hypotese:
Graden synker med en pr. differanse, altså må $a_n$være en andregradsfunksjon av n!
(Vi ser også at summefølgen A_n har a_n som differansefølge og derfor må være en tredjegradsfunksjon av n.)

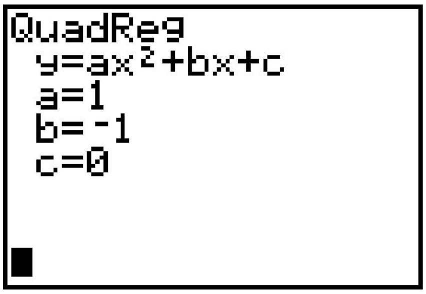
Vi må altså bestemme a, b og c i $a_n = an^2 + bn + c$

Nok med tre punkter på funksjonsgrafen: $(1, 0), (2, 2), (3, 6)$

På TI83/84 gjør vi:

{1,2,3} STO▷L1 Liste med uavhengig variabel n
{0,2,6} STO▷L2 Liste med avhengig variabel a_n
STAT, **CALC**, **5**:**QuadReg L1**,**L2**

gir da følgende resultat:



Altså har vi $a_n = n^2 - n = n(n-1)$

Et artig poeng med summer og differanser:

Mer formelt har vi:

$D(a_n) = a_{n+1} - a_n$ (Definisjon av differansefølge.)

som medfører:

$D(A_n) = A_{n+1} - A_n = a_n$

Da har vi at rekken:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots + (A_{n+1} - A_n) = A_{n+1} - A_1$

da alle ledd unntatt A_1 og A_{n+1} forekommer to ganger med motsatt fortegn og derfor kanselleres!

Sagt på en annen måte:

$\sum_{i=1}^{n} a_i = {}_1^{n+1}\ [A_i]$ som minner sterkt om: $\int_a^b f(x)dx = {}_a^b\ [F(x)]$

$D(A_n) = a_n$ minner også om: $F'(x) = f(x)$

Bruk av sammenhengen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$:

Ved å studere for eksempel tabellen

a_n :	0	2	6	12	20	30	42	…
d_n :	2	4	6	8	10	12	…	

ser vi at $a_n = a_{n-1} + d_{n-1} = a_{n-1} + d_{n-2} + d_{n-1} = \ldots = a_1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} =$

$a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$

Hvis d_i er aritmetisk eller geometrisk, kan vi regne ut $\sum_{i=1}^{n-1} d_i$ og finner dermed a_n!

Her er differansene en aritmetisk følge!

Da har vi

$d_n = 2 + 2(n-1) = 2n$

og

$S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{n}{2}(d_1 + d_n)$

og dermed også: $S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i = \frac{n-1}{2}(d_1 + d_{n-1}) = \frac{n-1}{2}(2 + 2(n-1)) = n^2 - n$

Som gir oss:

$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 0 + n^2 - n = n^2 + n$

Geometriske figurer:

Figurer er også et godt hjelpemiddel.

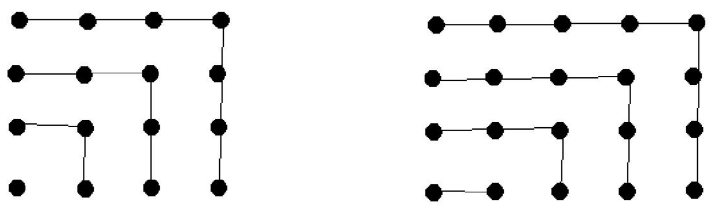
Vi ser på eksempel 1 side 110, som sier at:

Summen av ulike tall er n^2: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$

Vi har også:

Summen av like tall er $n^2 + n$: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n$

fordi vi kan tegne følgende figurer:



Arbeidsoppgaver:

Instruks:

- Arbeid 3 og 3 i grupper.

Litt om læringsmålene med oppgavene som kommer:

- Eksplisitte og rekursive uttryk for a_n i følger og rekker.
- Teknikker for å finne eksplisitte uttrykk for a_n i følger og rekker som ikke er geometriske eller aritmetiske:
  - Gjetting, oppdage sammenhenger mellom a_n og n
  - Geometriske resonnementer (Trekanttall, tetraedertall, rektangeltall, femkanttall,...)
  - Se på differansefølger, summefølger og sammenhengen: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$
  - Regresjon på lommeregner
- Induksjonsbevis

Oppgave I - Pascals trekant

Se på 205 side 205 i læreboken!

e) Hvor finner vi differansene mellom leddene i en diagonal?

f) I rad n og diagonal/kolonne r er tallet den binomiske koeffisienten $\binom{n}{r}$,
eksempelvis $\binom{5}{3} = \frac{5^{(3)}}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$

Forklar med figur hvorfor $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

Oppgave II - Figurtall

Finn både rekursive og eksplisitte uttrykk for n –te ledd i oppgavene som kommer!

Trekanttallene

Se oppgave 211 side 333 og figur side 80.

a) Hvorfor kaller vi dem trekanttall? Vis med figur!

b) Finner du trekanttallene i Pascals trekant?

c) Skriv trekanttallene som summer av positive heltall, og bruk dette til å bevise formelen $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Rektangeltallene

d) Gjør oppgave 212 side 333 og se på figur side 80.

Tetraedertallene

e) Gjør oppgave 213 side 333! Obs: Det mangler noen kuler i den siste figuren, "grunnflaten" skal ha 6 kuler!

Femkanttallene

f) Gjør oppgave 215 side 333!

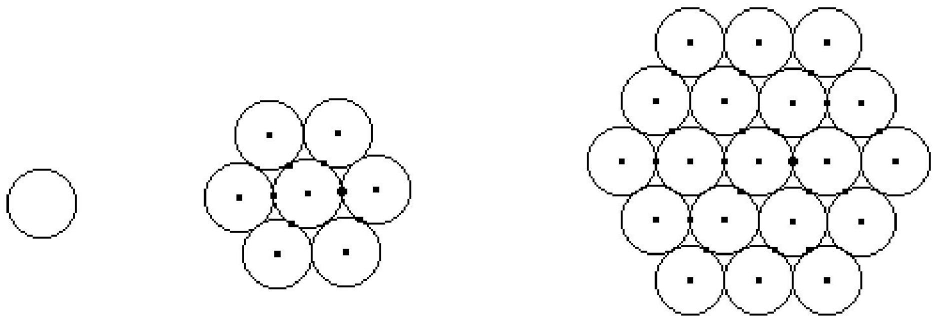
"Båt-tallene"
g) Gjør oppgave 230

Oppgave III

Finn på dine egne figur-tall med "Båt-tallene" som inspirasjon!
Eksempelvis "Bil-tallene", "Hus-tallene", "Scooter-tallene",...
Analyser og finn både rekursive og eksplisitte uttrykk for n –te ledd i den tall-følgen dere lager.

Oppgave IV - Kabeltvinning

Når man tvinner kabler får man følgende sammenheng mellom antall kordeler og tykkelse:

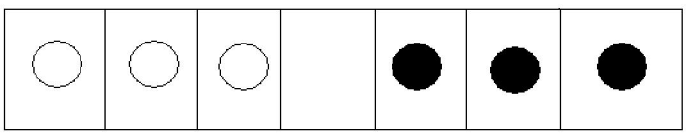


1 7 19

a) Hvordan går det videre? Finner du noe system?
b) Klarer du å finne et uttryk for n'te ledd $a_n = f(n)$?
Tips: Kan du dele opp figurene i geometriske figurer du klarer å finne antall kordeler i?
c) Bruk induksjonsbevis til å vise at formelen du fant i b) er riktig.
d) Bruk lommeregner og regresjon til å vise at formelen du fant i b) er riktig.

Oppgave V - Spill

Vi skal analysere følgende spill matematisk:



Reglene er enkle:

- Hvite brikker kan bare flyttes mot høyre, svarte bare mot venstre.
- Hvis det er et ledig felt på den andre siden av en brikke kan brikkene hoppe over en annen brikke.
- De hvite og de svarte brikkene skal bytte plass.

a) Hvor mange trekk trenger man?
b) Fyll ut følgende tabell:

Antall brikker på hver side: n	1	2	3	4	5	...	n	...
Nødvendig antall flytt: a_n								

c) Finn systemet i tallfølgen som oppstår.

d) Prøv å finne et uttrykk for $a_n = f(n)$
e) Hvor mange trekk trenger man når det er 100 svarte og 100 hvite brikker?
f) Bruk induksjonsbevis og regresjon på lommeregner til å bekrefte resultatet i d).