# Fagdag 3

# Kommentarer og oppsummering

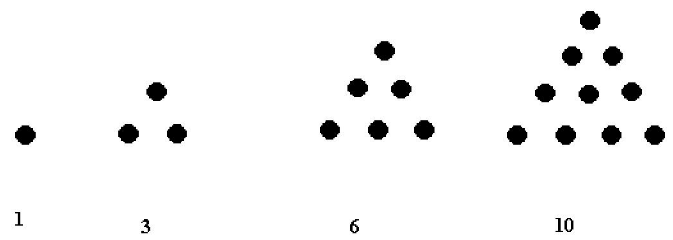
## Oppgave I - Pascals trekant

Se løsningsforslag oppgave 205 i uke 44. (www.ulven.biz/r2/algebra/oppgaver.pdf)

## Oppgave II - Figurtall

### " Trekanttallene":

a) Kan tenke oss tallene i følgen som trekantmønstre av kuler:




b)
Vi kan lage oss en såkalt *rekursiv* formel, som betyr en "opprullingsformel",
ved å notere oss at differansene blir: $2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$
Altså kan vi "rulle" opp tallene ved å starte med 1, legge til 2, deretter 3, osv.
Matematisk kan dette formuleres slik:

$$\begin{bmatrix} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n \end{bmatrix}$$

Problemet med rekursive formler er at det kan ta lang tid å "rulle" seg frem til feks. $a_{100}$...

For å finne en *eksplisitt* formel, dvs. en formel uten leddet foran, som bare avhenger av $n$,
kan det være lurt med en tabell:

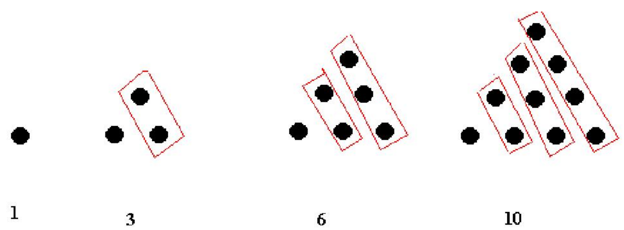
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\ldots$ | $n$ | $\ldots$ |
| $a_n$ : | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | $\ldots$ | ? | $\ldots$ |

Ved å prøve forskjellige operasjoner på naboceller i $n$-raden, finner vi ut at:

$\frac{1\cdot2}{2} = 1,\ \frac{2\cdot3}{2} = 3,\ \frac{3\cdot4}{2} = 6,\ \frac{4\cdot5}{2} = 10, \ldots, \frac{n\cdot(n+1)}{2}, \ldots$

c)
Figuren i oppgave a) viser, hvis man ser litt nøyere på den, at:

$1 = 1$
$1 + 2 = 3$
$1 + 2 + 3 = 6$
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$



Altså er delsummene i $1+2+3+4+5+\ldots+n+\ldots$ trekanttallene!

Dermed har vi:

$$1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \text{ (eller } \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n)$$

Antall kuler i slike trekanter er altså gitt ved formelen $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ når det er $n$ kuler i hver side. Dette kan vi utnytte i oppgave II!

Vi kunne også brukt QuadReg i lommeregneren på listene $\{1,2,3\}$ og $\{1,3,6\}$.

### Tetraedertallene

Se løsningsforslag oppgave 213 i uke 43. (www.ulven.biz/r2/algebra/oppgaver.pdf)

### Femkanttallene

Se løsningsforslag oppgave 215 i uke 43. (www.ulven.biz/r2/algebra/oppgaver.pdf)

## Oppgave IV - Kabeltvinning

a)

| $n$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ : | 1 | 7 | 19 | 37? | 61? | … | | |
| Differanser: | 6 | 12 | 18? | 24? | 30? | … | | |

Hypotese: Differansene er $6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \ldots$

Altså aritmetisk følge med $d_n = 6 + 6(n-1) = 6n$

Da får vi en rekursiv formel:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 6(n-1) \end{array} \right\} \text{ eller } \left\{ \begin{array}{c} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 6n \end{array} \right\}$$

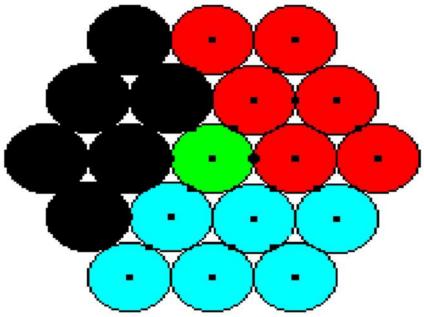
b)

**Eksplisitt formel med figurtall**:

Vi deler opp i:

- parallellogrammer, hvor antall kuler er produktet av antall kuler i to av sidene
- trekanter, hvor antall kuler er $\frac{n(n+1)}{2}$. Se oppgave I c) !

Et eksempel på hvordan dette kan gjøres: (Du finner sikkert flere måter å gjøre det på!)



19

$a_3$ er her sammensatt av 3 parallellogrammer med sider 2 og 3 og en enkelt kule i midten, altså:

$$3(3 \cdot 2) + 1 = 19$$

Generelt har vi derfor:

$$a_n = 3(n \cdot (n-1)) + 1 = 3n^2 - 3n + 1$$

**Eksplisitt formel med regresjon**:

Vi kunne også brukt QuadReg i lommeregneren på listene $\{1,2,3\}$ og $\{1,7,19\}$:

$\{1,2,3\}$ i L1 og $\{1,7,19\}$ i L2 med STAT, EDIT

STAT, CALC, QuadReg L1, L2 gir da:

$$a_n = 3n^2 - 3n + 1$$

**Eksplisitt formel med "differanseformelen"**:

Eller sammenhengen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| $a_n$ : | 1 | 7 | 19 | 37 | 61 | ... |
| $d_i$ : | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | ... |

$d_i$ er aritmetisk:

$$d_n = 6 + 6(n-1) = 6n$$

$$S_n = \tfrac{n}{2}(d_1 + d_n) = \tfrac{n}{2}(6 + 6n) = 3n(n+1)$$

og

$$S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 3(n-1)((n-1)+1) = 3n^2 - 3n$$

): $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 1 + 3n^2 - 3n = 3n^2 - 3n + 1$

## Oppgave V - Spill

a)

Litt prøving og feiling avdekker noen prinsipper/retningslinjer:

- Prøv å få hvit og svart annenhver gang under flyttingen
- Pass på å "følge på" for å holde annenhvergang-mønsteret

Hvis man har problemer, kan det være lurt å starte med 2 av hver farve og se om man oppdager noe!
Forenkling er et vanlig problemløsningstriks!

Man bør oppdage at trengs 15 trekk.

b)
Vi får etterhvert tabellen:

| $n$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\ldots$ | $n$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ : | 3 | 8 | 15 | 24 | $\ldots$ | | | |

c)
Differanser: $5, 7, 9, 11, \ldots$ altså aritmetisk:

$$d_n = 5 + 2(n-1) = 2n+3$$
$$d_{n-1} = 2(n-1)+3 = 2n+1$$

Rekursivt uttrykk:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + d_{n-1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2n + 1 \end{array} \right\}$$

eller

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + d_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 3 \end{array} \right\}$$

Ved å sammenligne $n$ –raden og $a_n$ –raden, oppdager man antagelig at
hver $a_n$ er produktet av $n$ rett over og $n+2$ to plasser mot høyre i $n$ –raden,
altså har vi:
$1 \cdot 3 = 3, 2 \cdot 4 = 8, 3 \cdot 5 = 15, 4 \cdot 6 = 24, \ldots, n(n+2), \ldots$

Vi kunne også brukt QuadReg på lommeregneren på listene $\{1,2,3\}$ og $\{3,8,15\}$.

e)
100 brikker på hver side gir da $a_{100} = 100 \cdot 102 = 10\,200$ flytt

## Sammenhengen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ gir:

| $n$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ : | 3 | 8 | 15 | 24 | $\ldots$ | |
| $d_i$ : | 5 | 7 | 9 | $\ldots$ | | |

Differansene er en aritmetisk følge:

$$d_n = 5 + 2(n-1) = 2n+3$$
$$S_n = \tfrac{n}{2}(d_1 + d_n) = \tfrac{n}{2}(5 + (2n+3)) = (4+n)n$$
og $\quad S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i = (4 + (n-1))(n-1) = 2n + n^2 - 3$

): $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 3 + 2n + n^2 - 3 = n^2 + 2n = n(n+2)$

## Oppgave IV - Oppsummering

Dette notatet er i seg selv en oppsummering av arbeidet, på et overordnet plan bør man ha merket seg at:

- Matematikk er ikke bare å sette inn i formler, men også å lage formler og strategier selv!
- Dette krever at man også trener seg opp i å bruke intuisjon, fantasi og kreativitet, gjetninger, prøving og feiling og uttesting av egne forslag og hypoteser!
- Tabeller, differanser og geometriske "kule"-figurer er til stor hjelp når man skal arbeide med følger og rekker!
- Differanser gir mulighet til å finne ut hvilken grad $a_n$ har, så regresjon på lommeregneren er til stor hjelp!

## Anvendelser

Kanskje ikke så lett for dere å se anvendelsene av oppgavene her, så jeg peker på noen muligheter:

### **Kabeltvinning**:

Kabeltvinning selvfølgelig, kan være aktuelt å se på feks. vektøkning ift. antall kordeler. Kabler med optiske fibre, hvilke kabelstørrelser er aktuelle hvis vi skal lage kabler som har tilstrekkelig kapasitet til å overføre feks. internett-forbindelser vha. standardiserte delkabler.

### **Spill**:

Problematikken er aktuell feks. hvis man skal regne ut hvor lang tid datamaskiner trenger på å analysere $n$ trekk fremover i et spill, feks. sjakk og andre brikkespill.