

## R2 - Fagdag 4 - 10.12.09

### Kommentarer til kurvetilpassningsoppgaven:

#### Teori:

#### 3.6 og 3.7: Omforming av $a \sin kx + b \cos kx$ :

$$a \sin kx + b \cos kx = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(kx + \varphi)$$

der  $\tan \varphi = \frac{b}{a}$  og  $\varphi$  i kvadranten med punktet  $P = (a, b)$ .

(Finnes en variant til hvis man ønsker cosinus istedenfor sinus:

$$a \sin kx + b \cos kx = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(kx - \varphi)$$

der  $\tan \varphi = \frac{a}{b}$  og  $\varphi$  i kvadranten med punktet  $P = (b, a)$ .)

#### Poenget med denne omformingen er:

- **Løse ligninger** av typen  $a \sin kx + b \cos kx = 0$  (uten å dividere med  $\cos x$ !) og  $a \sin kx + b \cos kx = c$
- **Drøfte funksjoner** av typen  $f(x) = a \sin kx + b \cos kx + d$  som på formen  $A \sin(kx + \varphi) + d = A \sin(k(x + \frac{\varphi}{k})) + d$  kan drøftes uten å derivere:
  - Maksimalverdi  $A + d$  når  $\sin(\dots) = 1$  :  $kx + \varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
  - Minimalverdi  $A - d$  når  $\sin(\dots) = -1$  :  $kx + \varphi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$
  - Vendepunkt med verdi  $d$  når  $\sin(\dots) = 0$  :  $kx + \varphi = 0 + k\pi$
- **Finne modellen** ut fra datapunkter og sammenhengene:  
 $A = \frac{\max - \min}{2}$ ,  $d = \frac{\max + \min}{2}$ ,  $k = \frac{2\pi}{T}$ , Faseforskjell:  $\frac{\varphi}{k}$
- Regresjon med lommeregner (SinReg) og GeoGebra (FitSin/RegSin) gir også resultatet på formen  $A \sin(k(x + \frac{\varphi}{k})) + d$

#### Oppgave

Tabellen nedenfor gir en oversikt over normaltemperaturen på Blindern i Oslo i løpet av et år.  $T(t)$  er her middeltemperaturen i måned nr.  $t$ .

$t$ [mnd]:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T(t)$ [°C]	-0.4	-0.5	1.9	6.3	12.5	13.6	17.4	15.9	13.2	6.4	4.1	-2.7

- a) Plott punktene på et ruteark og finn ved regning en modell som beskriver  $T(t)$  på formen  $A \sin(k(t + \frac{\varphi}{k})) + d$
- b) Finn samme modell med kurvetilpassning ("regresjon") på lommeregner.
- c) Finn samme modell med kurvetilpassning i GeoGebra. (Hvis du ikke har pc, så tar du det hjemme senere.)
- d) Finn ved regning og kontroll med lommeregner/GeoGebra:
  - i) Når er temperaturen høyest og hva blir den i henhold til denne modellen?
  - ii) Når er temperaturen lavest og hva blir den i henhold til denne modellen?
  - iii) Når stiger (og synker) temperaturen mest?

#### a) Ved regning:

Ut fra en plotting og tabellen:

$$T_{\max} = 17.4, \quad T_{\min} = -2.7, \quad T = 12 \text{ (Hva ellers...)}$$

$$\begin{aligned} \text{Amplitude:} \quad A &= \frac{\max - \min}{2} = \frac{17.4 - (-2.7)}{2} = 10.1 \\ \text{Likevektslinje:} \quad d &= \frac{\max + \min}{2} = \frac{17.4 + (-2.7)}{2} = 7.4 \\ \text{Periode:} \quad T = 12 &\Rightarrow k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12} = 0.524 \end{aligned}$$

Tegner vi inn likevektslinjen ser vi at det første vendepunktet ligger omtrent på  $t = 4.2$ , altså der plottet skjærer likevektslinjen første gang. Det gir oss  
Faseforskjell:  $\frac{\varphi}{k} = 4.2$

$$\begin{aligned} T(t)_{\text{regning}} &= 10.1 \sin(0.524(t - 4.2)) + 7.4 = \\ &= 10.1 \sin(0.524t - 2.20) + 7.4 \end{aligned}$$

b) **Lommeregner:**

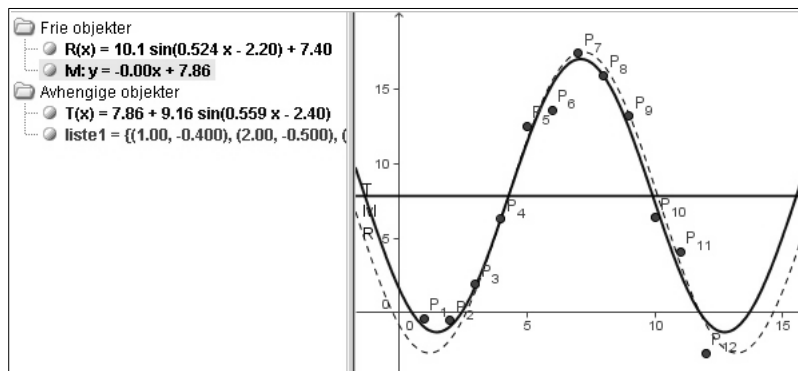
$L1 = \{1, 2, \dots, 12\}$ ,  $L2 = \{-0.4, -0.5, \dots, -2.7\}$   
STAT, CALC, C:SinReg L1, L2, Y1 gir:

$$T(t)_{LR} = 9.16 \sin(0.559t - 2.40) + 7.86$$

c) **GeoGebra:**

Her får vi også:

$$T(t)_{ggb} = 9.16 \sin(0.559t - 2.40) + 7.86$$



**Kommandoer:**

Punktene legges inn i regnearket; Vis, Regneark  
Merker punktene, høyreklikker og velger "Lag liste med punkter".

1	-0.4			
2	-0.5			
3	1.9			
4	6.3			
5	12.5			
6	13.6			
7	17.4			
8	15.1			
9	13.1			
10	6.4			
11	4.1			
12	-2.1			

**A1:B12**

- Kopier
- Lim inn
- Klipp ut
- Slett objekt

---

Lag liste med punkter

Lag matrise

---

Egenskaper...

Så kjører vi:

$$T(x) = \text{RegSin}(\text{liste1})$$

$$|v|: y = 7.86 \quad (\text{Likevektslinje.})$$

La også inn det vi fikk med regning:

$$R(x) = 10.1 \sin(0.524 x - 2.20) + 7.4$$

d)

Bruker i fortsettelsen den beste løsningen fra lommeregner/GeoGebra:

$$T(t) = 9.16 \sin(0.559t - 2.40) + 7.86$$

i) Høyeste temperatur når  $\sin(\dots) = 1$ :

$$T_{\max} = 9.16 \cdot 1 + 7.86 = 17.0 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Tidspunkt gitt av:

$$\sin(0.559t - 2.4) = 1 \Leftrightarrow$$

$$0.559t - 2.4 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2.4}{0.559} + k \frac{2\pi}{0.559} = 7.1 + k11.2 \quad (\text{Burde blitt } k12.0\dots)$$

):  $t = 7.1$ , altså litt etter midten av juli.

ii) Laveste temperatur når  $\sin(\dots) = -1$ :

$$T_{\min} = 9.16(-1) + 7.86 = -1.3 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Tidspunkt gitt av:

$$\sin(0.559t - 2.4) = -1 \Leftrightarrow$$

$$0.559t - 2.4 = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2.4}{0.559} + k \frac{2\pi}{0.559} = 12.7 + k11.2$$

):  $t = 1.5$ , altså i månedsskiftet januar/februar.

- iii) Kurven forandrer seg mest i vendepunktene,  
altså når kurven skjærer likevektslinjen og  $\sin(\dots) = 0$

Tidspunktene gitt av:

$$\sin(0.559t - 2.4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$0.559t - 2.4 = 0 + k\pi \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{2.4}{0.559} + k\frac{\pi}{0.559} = 4.29 + k5.62$$

$t = 4.3$ : Stiger mest i slutten av April.

$t = 9.9$ : Synker mest i midten av Oktober.