# Plan for fagdag 1

**R2 - 04.09.2014**

## Plan:

- **Teori:**
  Litt om de vanlige teknikkene for å finne ut av følger og rekker:
  - Differanse- og summefølger.
  - Bruk av kurvetilpasning. (Regresjon.)
  - Figur-tall.
  - Sammenhengen: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$, der $d_i = a_{n+1} - a_n$
  - Bruk av CAS
- **Arbeidsoppgaver**

## *Viktig å få gjort arbeidsoppgavene!*

## Differanse- og summefølger

Differanser er ofte nyttige, selv om følgen ikke er aritmetisk, så la oss generalisere litt:
Vi ser på følgen

$a_n : \quad 2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$

og lager en tabell for å få oversikt:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Differanser av differanser: $D^{(2)}(a_n)$ | 2 | 2 | 2 | 2 | ... | | | |
| Differanser: $D(a_n)$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | ... | | |
| Følgen: $a_n$ | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | ... | |
| Sum: $A_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ | 0 | 2 | 8 | 20 | 40 | 70 | 112 | ... |

(Her har vi definert: $\quad D(a_n) = a_{n+1} - a_n$
og summen $A_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ slik at $a_n = A_{n+1} - A_n = D(A_n)$.
Den vanlige summen av en følge, rekken $S_n$ blir her da $S_n = A_{n+1}$.)

Dette er interessant!

Differansene er en lineær følge, og differansene av differansene er en konstant følge!
Det er derfor nærliggende å anta at:

Følgen $a_n$ er et uttrykk av andre grad.
Summefølgen $A_n$ er et uttrykk av tredje grad.

Altså at:

Graden synker med en pr. differanse!

Dette er nyttig å vite, hvis vi ønsker å bruke kurvetilpasning:

## Bruk av kurvetilpasning

Da vi nå antar at $a_n$ er av andre grad, kan vi gjøre en kurvetilpasning til punktene

$$(1, a_1) = (1, 2), \qquad (2, a_2) = (2, 6) \qquad \text{og} \qquad (3, a_3) = (3, 12)$$

som vi enten direkte;**Liste1** $= \{(1,2),\ (2,6), (3,12)\}$, eller ved hjelp av regneark legger i en liste med navn Liste1.
Så kjører vi kommandoen: **a(x)=RegPoly[Liste1,2]**
og får: **a(x)=x$^2$+x**
Altså har vi:

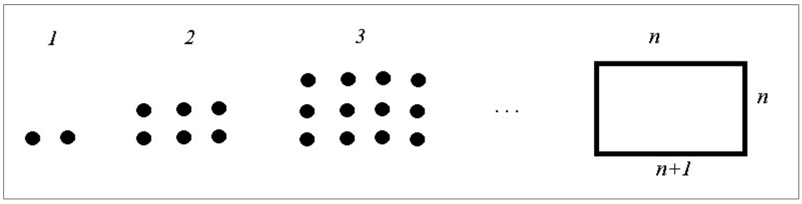
$$a_n = n^2 + n$$

Faktoriserer vi til $n(n+1)$, ser vi også lett at følgen kunne vært skrevet om til

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ 4 \cdot 5, \ldots$$

altså som produktet av to naboindekser, noe som viser at vi også kunne brukt figurtall:

# Figur-tall




Ved å plassere prikkene i rektangler ser vi igjen at $a_n = n(n+1)$

# Sammenhengen: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$

Her er $d_i$ differansene $d_i = a_{n+1} - a_n$
Fra tabellen lenger opp;

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Differanser: $D(a_n)$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | $\ldots$ | | |
| Følgen: $a_n$ | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | $\ldots$ | |

ser vi at differansefølgen er $4, 6, 8, \ldots$ som er en aritmetisk følge

$$d_n = d_1 + d(n-1) = 4 + 2(n-1) = 2n + 2$$

Da har vi

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} d_i = 2 + \frac{n-1}{2}(d_1 + d_{n-1}) \qquad \text{(Bruker summeformel for aritmetisk følge.)} \\ &= 2 + \tfrac{n-1}{2}(4 + 2(n-1) + 2) = 2 + \tfrac{n-1}{2}(2n+4) = 2 + (n-1)(n+2) \\ &= 2 + n^2 - n + 2n - 2 = n^2 + n \end{aligned}$$

For å slippe regning kan vi bruke CAS:

# Bruk av CAS

| **Kommando:** | **Resultat:** | **Kommentar:** |
|---|---|---|
| **d(n):=4+2(n-1)** | d(n):=2n+2 | Definerer differansefølgen |
| **a(n)=2+Sum(d(i),i,1,n-1)** | a(n):=n$^2$+n | Bruker formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ |
| **Følge[a(n),n,1,6]** | {2, 6, 12, 20, 30, 42} | Tester formel |

Kunne også gått videre og regnet ut summefølgen $A(n)$ på samme måte:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Følgen: $a_n$ | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | $\ldots$ | |
| Sum: $A_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ | 0 | 2 | 8 | 20 | 40 | 70 | 112 | $\ldots$ |

| **Kommando:** | **Resultat:** | **Kommentar:** |
|---|---|---|
| **A(n):=0+Sum(a(i),i,1,n-1)** | A(n):=$\frac{1}{3}$n$^3$ − $\frac{1}{3}$n | Bruker formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ |
| **S(n):=A(n+1)** | S(n):=$\frac{1}{3}$n$^3$+n$^2$+$\frac{2}{3}$n | Lager rekken $S_n = A_{n+1}$ |
| **Følge[S(n),n,1,6]** | {2, 8, 20, 40, 70, 112} | Tester formel |

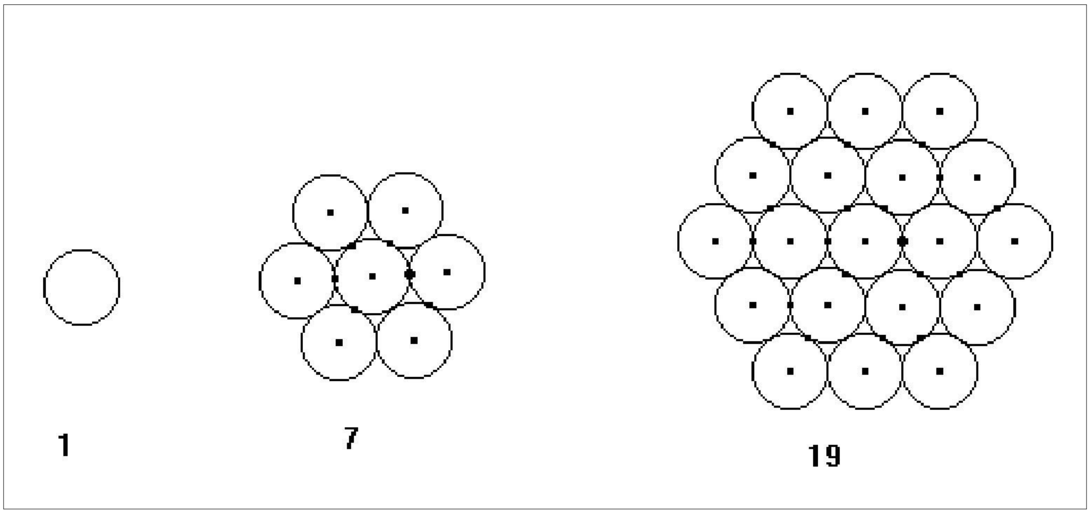
---

# Arbeidsoppgaver

**Instruks:** ***Arbeid i grupper på 2. Viktig å diskutere!***

## Oppgave I - Kabeltvinning

Når man tvinner kabler, får man følgende sammenheng mellom antall kordeler og tykkelse:

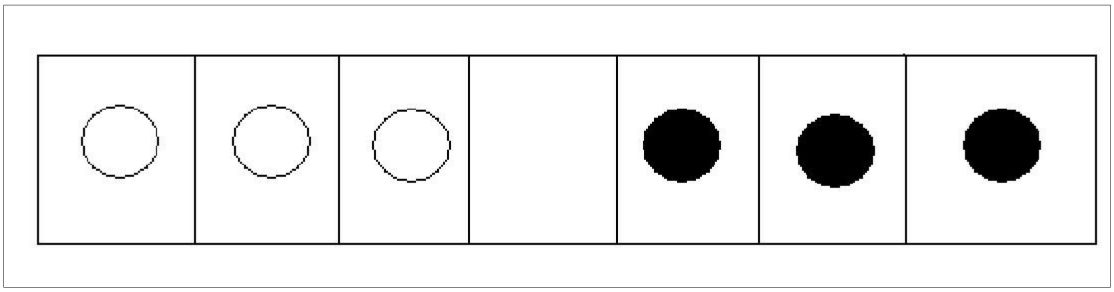



a) Hvordan går det videre? Finner du noe system?

b) Klarer du å finne et uttrykk for $n$'te ledd $a_n$?
Løs oppgaven både med figurtall, kurvetilpasning,
formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ og ved hjelp av CAS!

## Oppgave II - Spill

Vi skal analysere følgende spill matematisk:



Reglene er enkle:

- Hvite brikker kan bare flyttes mot høyre, svarte bare mot venstre.
- Hvis det er et ledig felt på den andre siden av en brikke, kan brikkene hoppe over en annen brikke.
- De hvite og de svarte brikkene skal bytte plass.

a) Hvor mange trekk trenger man?

b) Fyll ut følgende tabell:

| Antall brikker på hver side: $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\dots$ | $n$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nødvendig antall flytt: $a_n$ | | | | | | | | |

c) Finn systemet i tallfølgen som oppstår og finn et uttrykk for $a_n$.
(Igjen, løs oppgaven både med figurtall, kurvetilpasning, formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ og ved hjelp av CAS!)

d) Hvor mange trekk trenger man når det er 100 svarte og hvite brikker?

# Oppgave III - Aktiviteten i lære boken

Vi har allerede funnet ut at summen av tallene i rad $n$ er $n^3$.

a) Finn et uttrykk for første og siste tall i hver rad; $f_n$ og $s_n$.

b) Bruk a) til å summere en rad og *bevise formelt* at summen er $n^3$.

c) Bruk formelen for summen av en aritmetisk rekke til å vise at summen $1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1)$ av de første $m$ oddetallene er $m^2$.

d) Bruk det du nå har funnet, til å vise at

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

(Sagt på en annen måte: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n})^2$ )

# Videre arbeid:

Med alt du nå har lært, kan du gå tilbake og fordype deg i oppgavene vi har sett på i forrige uke:

## 205 med Pascals trekant:

e) Hvor finner vi differansene mellom leddene i en diagonal?
f) I rad $n$ og diagonal/kolonne $r$ er tallet den binomiske koeffisienten $\binom{n}{r}$,
eksempelvis $\binom{5}{3} = \frac{5^{(3)}}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

Forklar med figur hvorfor $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

## 213 Tetraedertallene.

## 215 Femkanttallene.

## 229 Pyramidetallene