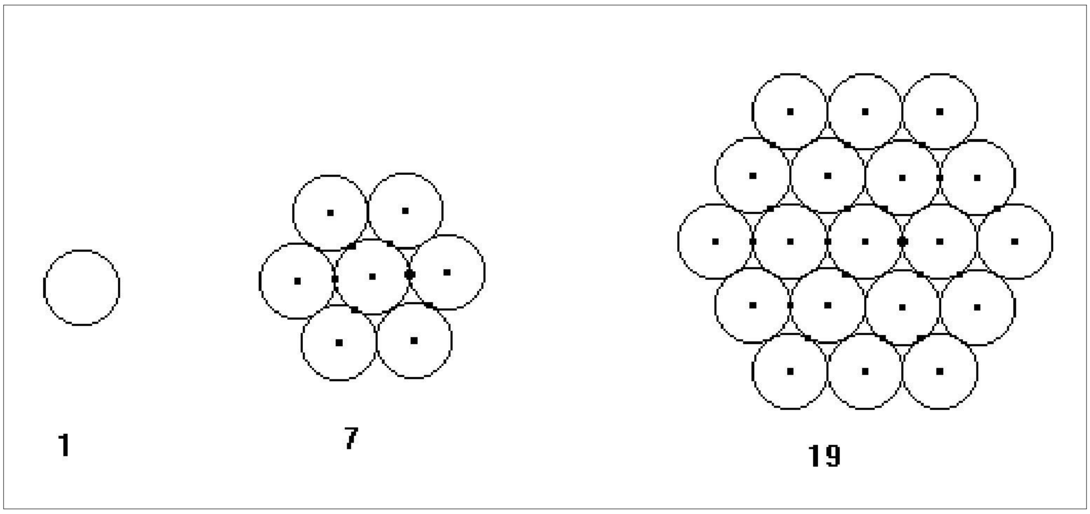
# Kommentarer til fagdag 1 - R2 - 04.09.2014

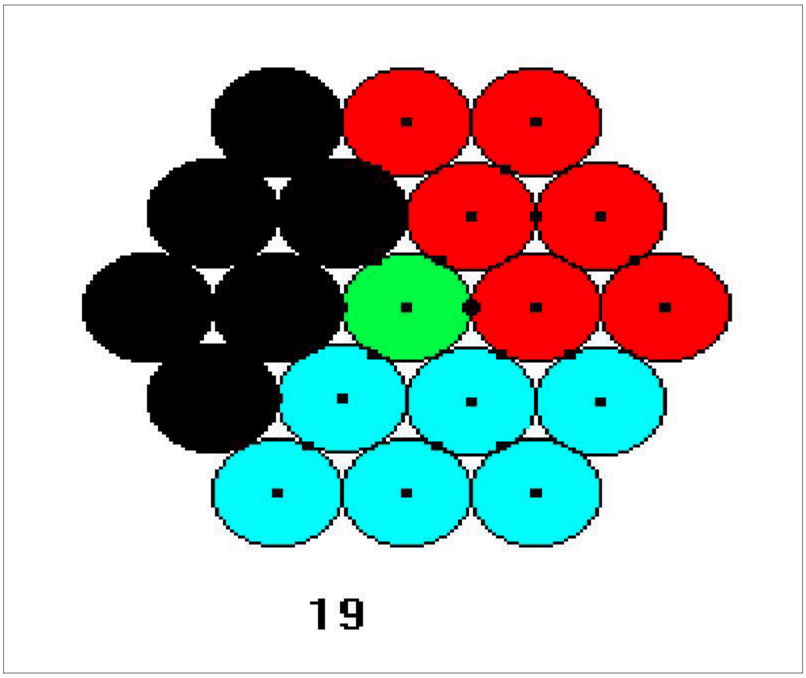
# Arbeidsoppgaver

## Oppgave I - Kabeltvinning




### Figurtall:

Figurtall er ofte det enkleste og det man bør starte med, eksempelvis:




Her har vi, for $n = 3$, tre parallellogrammer med $3 \cdot 2 = n \cdot (n-1)$ og kordelen i midten, så vi får formelen:

$$a_n = 3n(n-1) + 1 = 3n^2 - 3n + 1$$

Mange muligheter, kunne også delt opp i et $2 \cdot 2$ parallellogram, et $3 \cdot 3$ parallellogram og et $2 \cdot 3$ parallellogram, og får igjen:

$$a_n = (n-1)^2 + n^2 + (n-1)n = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 - n = 3n^2 - 3n + 1$$

## Kurvetilpasning:

Vi ser at differansene er 6, 12, ... og antar derfor at det fortsetter slik:

$$6, 12, 18, 24, \ldots$$

altså en aritmetisk følge; første grad.
Kabeltallene $a_n$ må derfor være av andre grad. Da trenger vi tre punkter:

$$(1,1), (2,7), (3,19)$$

som vi legger i Liste1 i GeoGebra, enten direkte med kommando:

Liste1={ (1,1), (2,7), (3,19) }

eller ved hjelp av regneark. (Merke, høyreklikk, Lag liste med punkt...)

Kommandoen RegPoly[ Liste1, 2] gir da;

$f(x) = 3x^2 - 3x + 1$, som igjen tilsvarer $a_n = 3n^2 - 3n + 1$

## Formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$:

Vi ser at differansene, $d_n = a_{n+1} - a_n$, er $6, 12, \ldots$, og antar derfor at det fortsetter slik: $6, 12, 18, 24, \ldots$, altså har vi seksgangen som differanse: $d_n = 6n$

Da får vi:

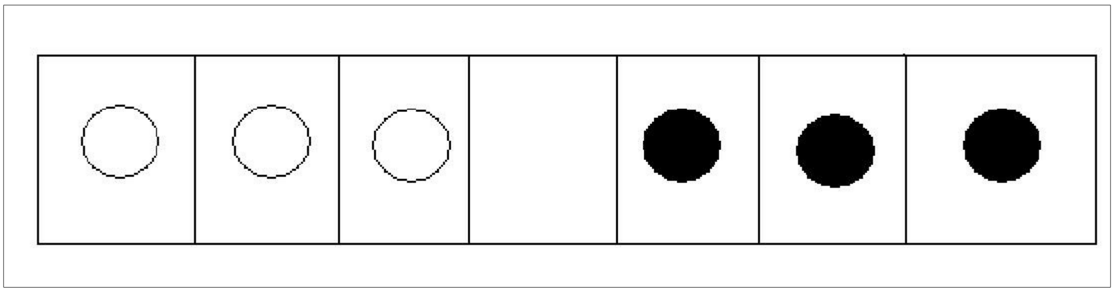
$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = a_1 + \frac{n-1}{2}(d_1 + d_{n-1}) = 1 + \frac{n-1}{2}(6 + 6(n-1)) =$$
$$1 + (n-1)\frac{6}{2}(1 + n - 1) = 1 + (n-1)3n = 3n^2 - 3n + 1$$

## Med CAS:

I GeoGebra CAS kan vi bruke formelen $a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ og få CAS-et til å gjøre alle mellomregningene:

| **Kommando:** | **Resultat:** | **Kommentar:** |
|---|---|---|
| **d(n):=6 n** | d(n):=6n | Definerer differansefølgen |
| **a(n):=1+Sum(d(i),i,1,n-1)** | a(n):=3n$^3$-3n+1 | Bruker formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ |
| **Følge[a(n),n,1,6]** | {1, 7, 19, 37, 61, 91} | Tester formel |

# Oppgave II - Spill



Ved å spille med henholdsvis en svart og en hvit, to svarte og to hvite, tre svarte og tre hvite osv., får vi tabellen:

| Antall brikker på hver side: $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nødvendig antall flytt: $a_n$ | 3 | 8 | 15 | 24 | ... | | | |
| Differanser: $d_n$ | 5 | 7 | 9 | | | | | |

## Figurtall:

Kan lage rektangler: 1•3, 2•4, 3•5, 4•6, ...,n(n+2)
Oppdages ved å se at indeksen $n$ er en faktor i alle $a_n$.

## Kurvetilpasning:

Vi ser at differansene er 5, 7, 9, ...
altså en aritmetisk følge: $d_n = 5 + 2(n-1) = 2n + 3$ av første grad.
Antall trekk i spillet blir da av andre grad. Da trenger vi tre punkter:
$(1,1),(2,8),(3,15)$
som vi legger i Liste1 i GeoGebra, enten direkte med kommando:
Liste1={ (1,1), (2,8), (3,15) }
eller ved hjelp av regneark. (Merke, høyreklikk, Lag liste med punkt...)

Kommandoen RegPoly[ Liste1, 2] gir da;
$f(x) = x^2 + 2x$, som igjen tilsvarer $a_n = n^2 + 2n = n(n+2)$

## Formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$:

Differansene var som sagt: $d_n = 2n + 3$
Da får vi:

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = a_1 + \tfrac{n-1}{2}(d_1 + d_{n-1}) = 3 + \tfrac{n-1}{2}(5 + 2(n-1) + 3) =$$
$$3 + \tfrac{n-1}{2}(5 + 2n - 2 + 3) = 3 + \tfrac{n-1}{2}(2n+6) = 3 + \tfrac{n-1}{2}2(n+3) =$$
$$3 + (n-1)(n+3) = 3 + n^2 - n + 3n - 3 = n^2 + 2n = n(n+2)$$

## Med CAS:

I GeoGebra CAS kan vi bruke formelen $a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ og få CAS-et til å gjøre alle mellomregningene:

| **Kommando:** | **Resultat:** | **Kommentar:** |
|---|---|---|
| **d(n):=2 n+3** | d(n):=2n+3 | Definerer differansefølgen |
| **a(n):=3+Sum(d(i),i,1,n-1)** | a(n):=$n^2$+2n | Bruker formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ |
| **Følge[a(n),n,1,6]** | {3, 8, 15, 24, 35, 48} | Tester formel |

# Oppgave III - Aktiviteten i lære boken

Vi har allerede funnet ut at summen av tallene i rad $n$ er $n^3$.

a) Finn et uttrykk for første og siste tall i hver rad; $f_n$ og $s_n$.

Første tall i rad $n$:

$$f_n = f_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2i, \qquad \text{da differansene er ulike tall}$$
$$= 1 + \tfrac{n-1}{2}(2 + 2(n-1)) = n^2 - n + 1$$

Tilsvarende for siste tall i rad $n$:

$$s_n = s_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2i + 2, \qquad \text{da differansene er 4,6,8,...}$$
$$= 1 + \tfrac{n-1}{2}(4 + 2(n-1) + 2) = n + n^2 - 1$$

b) Bruk a) til å summere en rad og *bevise formelt* at summen er $n^3$.

$n$'te rad har $n$ ledd og er ulike tall som er en aritmetisk følge.
Vi summerer:

$$S_n = \tfrac{n}{2}(f_n + s_n) = \tfrac{n}{2}(n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1) = \tfrac{n}{2}(2n^2) = n^3 \qquad \textit{QED}$$

(Her ser vi kanskje også at gjennomsnittet av hver rad er kvadrattall, $n^2$, og at summen av en rad derfor blir $n \cdot n^2 = n^3$.)

c) Bruk formelen for summen av en aritmetisk rekke til å vise at summen $1 + 3 + 5 + \ldots + (2m-1)$ av de første $m$ oddetallene er $m^2$.

$$S_m = \tfrac{m}{2}(1 + (2m-1)) = \tfrac{m}{2}2m = m^2 \qquad \textit{QED}$$

d) Bruk det du nå har funnet, til å vise at
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

(Sagt på en annen måte: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$ )

Da hver rad i oppstillingen har sum $n^3$, blir venstre side av ligningen over lik summen av alle tallene i alle rader opp til rad $n$.

Antall oddetall totalt i $n$ rader er $m = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

Summen av $m$ oddetall har vi vist er lik $m^2$ i c), så vi får at høyre siden blir $m^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$ *QED*

Da $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ er trekanttall $n$, får vi også at:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$