Fagdag R2 - 02.10.2014

Kommentarer til arbeidsoppgavene

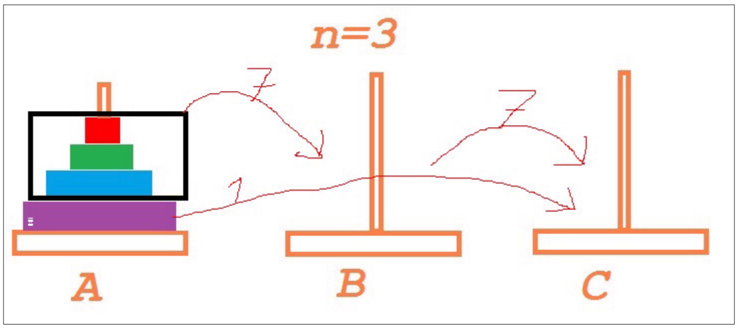
Tårnene i Hanoi:

a)
Ved å eksperimentere, enten med www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html eller med mynter eller lignende, kommer vi vel frem til denne tabellen:

n :	1	2	3	4	...	n
h_n :	1	3	7	15		?
d_n :	2	4	8			2^n

Her kan man jo tippe på både 6 og 8 som 3'dje differanse, så vi må enten prøve oss frem til vi er rimelig sikre på at 15 er minimum eller finne 15 ved et rekursivt resonnement, som i b:

b)
Rekursivt resonnement:



Når vi skal flytte 4 skiver, vet vi at vi trenger 7 flytt for å flytte 3 skiver til en annen stang.
Figuren illustrerer at vi kan:

1) Flytte tre øverste skiver til B i $h_3 = 7$ flytt.
2) Flytte største skive fra A til C i 1 flytt.
3) Flytte tre øverste skiver fra B til C i $h_3 = 7$ flytt.

Altså har vi:

$$h_4 = h_3 + 1 + h_3 = 2h_3 + 1$$

Som kan generealiseres til: $\left\{ \begin{array}{c} h_{n+1} = 2h_n + 1 \\ h_1 = 1 \end{array} \right\}$

Det er et poeng at rekursive formler for en tallfølge ikke trenger å være unike: Bruker vi differansene $d_n = 2^n$ fra tabellen, kan vi lage den alternative rekursive formelen:

$$\left\{ \begin{array}{c} h_{n+1} = h_n + 2^n \\ h_1 = 1 \end{array} \right\}$$

(Eksplisitte formler derimot, vil derimot alltid være unike!)

c)
Eksplisitte uttrykk for tallfølger kan som tidligere nevnt finnes på i hvert fall fire måter:

1) "Se"/oppdage det med flaks, talent eller prøving og feiling.
2) Figurtall, oppstillinger og leting etter kjente følger som trekanttall, rektangeltall, osv.
3) Tabell-oppstillinger.
4) $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ (Manuelt eller med GeoGebra CAS.)

I dette tilfellet går 1), 3) elller 4):

1) Innsikt:

Hvis man legger til 1, ser vi at $h_n + 1 \,:\, 2, 4, 8, 16, \ldots$
Altså har vi at $h_n + 1 = 2^n \Leftrightarrow h_n = 2^n - 1$

3) Tabelloppstillinger virker på alle følger som er rekursivt formulert som:
$\{ a_{n+1} = a_n k + b, \quad a_1 = c \}$
som eksempelvis:

Sparing med faste beløp, 1000 kr, og rente 3.5%:
$\{ s_{n+1} = s_n 1.03 + 1000, \quad a_1 = 1000 \}$

Faste utslipp, 1000kg, hver periode minus prosentvis nedbryting/utrenning (1%):
$\{ u_{n+1} = u_n 0.99 + 1000, \quad a_1 = 1000 \}$

Elgebestand (100 dyr i utgangspunkt), der det fødes 10% hvert år og skytes 5 hvert år:
$\{ e_{n+1} = e_n 1.1 - 5, \quad e_1 = 100 \}$

Vår formulering $h_{n+1} = 2h_n + 1$ er av samme type, så vi setter opp en tabell som med sparing med faste beløp:

$n:$	1	2	3	4	...	n
	1	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 2^2$	$1 \cdot 2^3$	$\ldots$	$1 \cdot 2^{n-1}$
		1	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 2^2$	$\ldots$	$1 \cdot 2^{n-2}$
			1	$1 \cdot 2^1$	$\ldots$	$1 \cdot 2^{n-3}$
				1	$\ldots$	$1 \cdot 2^{n-4}$
					$\ldots$	$\ldots$
						1

Den siste kolonnen er en geometrisk rekke som gir oss h_n:
$h_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$

4) $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$

Differansene er $d_n = 2^n$, som er eksponentialfunksjon og geometrisk tallfølge, så vi har summeformel for å regne ut:

$$h_n = h_1 + d_1 \frac{k^{n-1}-1}{k-1} = 1 + 2\frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 1 + 2(2^{n-1} - 1) =$$
$$1 + 2 \cdot 2^{n-1} - 2 = 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1$$

Med GeoGebra:

d(n):=2 ^n
h(n):=1+Sum(d(i), i, 1, n-1) gir **h(n):=2**^{n}**-1** direkte

---

Trigonometri:

Løsningsskisser for noen av type-oppgavene dere skulle arbeide med:

3.21 b)

Metode beskrevet i eksempel 1.
Egentlig ikke så bra å dividere med $\cos x$, så vi lærer en bedre metode senere.
På den annen side så er metoden i eksempel 1 rask:

$$2\sin x + 3\cos x = 0, \qquad x \in [0^\circ, 360^\circ\rangle$$

$\cos x \neq 0$ gir:

$$2\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$x = -56.3^\circ + k180^\circ$$

$$L = \{123.7^\circ, 303.7^\circ\} \qquad (\ k = 1, 2\ \ )$$

$\cos x = 0$ gir: $\sin x = 0$ som gir selvmotsigelse, da sinus og cosinus aldri begge er lik null for samme vinkel.

3.22 a)

Faktoriser direkte! Ikke rot med abc-formel her:

$$2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x + \tfrac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\tfrac{1}{2}$$

$$x = 0^\circ + k360^\circ \vee x = 180^\circ + l360^\circ \vee x = -30^\circ + m360^\circ \vee x = 180^\circ - (-30^\circ) + n360^\circ$$

$$L = \{0^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 330^\circ\} \qquad (\ k = 0, l = 0, n = 0, m = 1\ )$$

3.22 c)

Eksempel 3 gir metode, og her har vi intet valg, vi må dividere med $\cos x$ for å komme videre, men vi liker det ikke...

$$\sin^2 x - 7.5\cos^2 x = 6.5\sin x\cos x, \qquad x \in [0^\circ, 540^\circ\rangle \qquad \text{(Obs: 1.5 omløp!)}$$

$\cos x \neq 0$ gir:

$\tan^2 x - 7.5 = 6.5\tan x \Leftrightarrow u^2 - 6.5u - 7.5 = 0, \qquad u = \tan x$

$\tan x = -1 \vee \tan x = 7.5$

$x = -45^\circ + m180^\circ \vee x = 82.4^\circ + n180^\circ$

$L = \{82.4^\circ, 135^\circ, 262.4^\circ, 315^\circ, 442.4^\circ, 495^\circ\}$

$(n = 0, m = 1, n = 1, m = 2, n = 2, m = 3)$

3.23a)

$\sin^2 x - \cos x = 0, \qquad x \in [0, 360^\circ\rangle$

$(1 - \cos^2 x) - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\cos x = -1.6180$ (Umulig) $\vee \cos x = 0.6180$
$x = 51.8^\circ \vee x = 360^\circ - 51.8^\circ = 308.2^\circ$

(Hvis alle vinkler i utgangspunktet ligger i første omløp og definisjonsmengden er første omløp, kan vi for enkelthets skyld droppe "$+k360^\circ$", men i alle andre tilfeller er det viktig å ha med dette for å være sikker på å finne alle løsninger!)

3.20 a) - Viktig typeoppgave!

$\cos x = \frac{3}{4} \wedge x \in [270^\circ, 360^\circ\rangle$ (x i fjerde kvadrant.)

Tegn sirkel og ta ut trekant med vinkel x, hosliggende katet 3 og hypotenus 4.
Da blir siste motstående katet $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ og vi får:

$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ (sinus negativ i fjerde kvadrant!)
$\tan x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ (tangens negativ i fjerde kvadrant!)

Kunne også brukt formler:

$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm\sqrt{1 - (\frac{3}{4})^2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

Forkaster positiv løsning, da x er i fjerde kvadrant, slik at: $\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

3.28

$2\sin 2x - \cos x = 0, \qquad x \in [0^\circ, 360^\circ\rangle$
$2 \cdot 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow 4\cos x(\sin x - \frac{1}{4}) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{4}$
$x = 90^\circ \vee x = 270^\circ \vee x = 14.5^\circ \vee x = 180^\circ - 14.5^\circ = 165.5^\circ$

3.29 b)

$\sin x = -\frac{3}{5} \wedge x \in \langle 270^\circ, 360^\circ\rangle$ (4de kvadrant)

I fjerde kvadrant er cosinus positiv:

$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2} = \pm\frac{4}{5}$ (Negativ forkastes.)

$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\frac{-3}{5}\frac{4}{5} = -\frac{24}{25}$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2(\frac{4}{5})^2 - 1 = \frac{7}{25}$
$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$