

Formelsamling i matematikk - R2

Ulven 24.09.2014

(Under arbeid...)

Vær snill å rapportere eventuelle feil!

Her vil jeg prøve å få samlet alle formler jeg mener dere kan ha nytte av både på eksamen og i fremtidige studier.

Jeg vil merke formler som er i utkanten av læreplanen med ***.

Jeg vil også henvisne til oppgaver i læreverket som eksemplifiserer spesielle formler.

Vektorer

Innskuddssetningen:

Finne koordinater til punkt ved å gå fra Origo $O = (0, 0)$ langs kjente punkt og vektorer:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AB} + \dots + \vec{ZP} = [x, y] \Leftrightarrow P = (x, y)$$

Skalarprodukt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos \alpha = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

Lengde:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

Normale:

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (Ekvivalens forutsetter at vi definerer: $\vec{0}$ står normalt på alt!)

Parallele:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \quad (\text{eller } \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0})$$

P, Q og R på linje:

$$\vec{PQ} \parallel \vec{QR} \Leftrightarrow \vec{PQ} = k\vec{QR} \quad (\text{eller } \vec{PQ} \times \vec{QR} = \vec{0})$$

Projeksjonen av \vec{u} på \vec{v} :

$$p = |\vec{u}| \cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{p} = p \vec{e} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Vinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = [y_u z_v - z_u y_v, -(x_u z_v - z_u x_v), x_u y_v - y_u x_v]$$

Lengden av vektorproduktet:

$$\text{Regnes enklest ut med: } |\vec{w}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

Areal av trekant og parallelogram utspent av \vec{u} og \vec{v}

$$\text{Areal}_{\text{parallelogram}} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

(Trekant blir selvfølgelig halvparten av dette.)

(Gjelder også i planet selvom vektorproduktet ikke er definert, da uttrykket under rottegnet er definert uansett!)

Avstand fra et punkt P til en linje l i planet:

Lag en normalvektor \vec{n} . (Bytt x - og y -koordinat og bytt fortegn på en av dem!)

$$\text{Hvis } A \text{ er et punkt på linjen har vi: } \vec{AP} \cdot \vec{n} = |\vec{AP}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\text{Avstanden vi søker: } d = \left| |\vec{AP}| \cos(\alpha) \right| = \left| \frac{|\vec{AP}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\alpha)}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

Avstand fra et punkt P til en linje l i rommet:

Metoden over virker ikke, da det er uendelig mange normalvektorer til en linje i rommet.

Punkt A på linjen og retningsvektor \vec{r} :

$$d = \frac{\text{Areal utspent av } \vec{AP} \text{ og } \vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{|\vec{AP} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{|\vec{AP}|^2 |\vec{r}|^2 - (\vec{AP} \cdot \vec{r})^2}}{|\vec{r}|}$$

(Kan også brukes i planet da arealformelen (rottegnet) gjelder i planet også selvom ikke vektorproduktet er definert.)

Ligning for plan:

Gitt punkt i planet $A(x_a, y_a, z_a)$, normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$ og $P(x, y, z)$ et fritt punkt i planet

$$\vec{AP} = [x - x_a, y - y_a, z - z_a]$$

\vec{AP} må stå normalt på \vec{n} for alle P :

$$\vec{n} \cdot \vec{AP} = 0 \Leftrightarrow [x - x_a, y - y_a, z - z_a][a, b, c] = 0 \Leftrightarrow ax - ax_a + by - by_a + cz - cz_a = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + (-ax_a - by_a - cz_a) = 0$$

Eller $ax + by + cz + d = 0$ der $d = -ax_a - by_a - cz_a$

Ligning for plan, gitt tre punkter A,B,C:

Lag \vec{AB} og \vec{AC} . Finn en normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$ som $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$.

Parameterfremstilling for plan som inneholder punktet $P = (x_p, y_p, z_p)$ og vektorene \vec{u} og \vec{v} .

$$\text{Vektorligning: } [x, y, z] = [x_p, y_p, z_p] + s\vec{u} + t\vec{v}$$

$$\text{Parameterfremstilling: } \left\{ \begin{array}{l} x = x_p + sx_u + tx_v \\ y = y_p + sy_u + ty_v \\ z = z_p + sz_u + tz_v \end{array} \right.$$

Avstand fra punkt til plan

Metoden er helt analog med projeksjonsformelen for avstanden fra et punkt til en linje i planet:

$$d = \left| \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \quad \text{eller} \quad d = \frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Volum av parallelepiped utspent av \vec{u} , \vec{v} og \vec{w} :

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

Firkantet pyramide blir en tredjedel av dette.

Trekantet pyramide blir en sjettedel av dette.

A, B, C og D i samme plan: $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0$ (Utspenner et flatt parallelepiped med volum 0...)

Parallele plan:

To plan α og β er parallelle hvis normalvektorene er parallelle: $\vec{n}_\alpha = k \vec{n}_\beta$

Vinkelen mellom to plan:

Finner vinkelen ν mellom normalvektorene til planene.

$0^\circ \leq \nu \leq 90^\circ$: ν er vinkelen mellom planene

$90^\circ < \nu \leq 180^\circ$: $180^\circ - \nu$ er vinkelen mellom planene

Vinkelen mellom plan og linje:

Finner vinkelen β mellom normalvektor til plan og retningsvektor til linje.

$$\begin{aligned} \beta \leq 90^\circ: & \quad 90^\circ - \beta \text{ er vinkelen mellom planet og linjen} \\ 90^\circ \leq \beta: & \quad \beta - 90^\circ \text{ er vinkelen mellom planet og linjen} \end{aligned}$$

Avstanden mellom to linjer l og m :

Med P og Q på hver sin linje, er avstanden projeksjonen av \overrightarrow{PQ} på en normalvektor til linjene:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{r}_l \times \vec{r}_m)|}{|\vec{r}_l \times \vec{r}_m|}$$

Viktig:

Mange av avstandsformlene har tall-verditegn som i oppgaver kan gi ligninger av typen:

$$|at + b| = c$$

Pass på ikke å miste løsninger ved å gjøre følgende omformulering:

$$|at + b| = c \Leftrightarrow at + b = c \vee at + b = -c$$

Kurver i rommet:**Vektorligning:**

Vektor fra origo til et punkt på linjen gjennom $A(x_a, y_a, z_a)$ og $B(x_b, y_b, z_b)$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

$$[x, y] = [x_a, y_a, z_a] + t[x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a]$$

Parameterfremstilling:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_a + (x_b - x_a)t \\ y = y_a + (y_b - y_a)t \\ z = z_a + (z_b - z_a)t \end{array} \right\}$$

$$\text{Parameterfremstillingen } \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} \text{ og } \textbf{vektorfunksjonen } \vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

representerer det samme, koordinatene til et punkt $P = (x, y)$ som beveger seg langs en kurve.

Den deriverte av posisjonsvektoren $\vec{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$ kan brukes til flere ting:

- Finne hastighetsvektoren $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$, når vi har en fysisk gjenstand som beveger seg og t er tiden
- Finne banefarten $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$
- Finne en tangentvektor $\vec{r}'(t)$ til en kurve som funksjon av t .

Deriverer vi en gang til, får vi akselerasjonsvektoren i et punkt på kurven:

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = [x''(t), y''(t), z''(t)]$$

Kuleflate:

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = R^2$$

Volum av kulesegment:

$$V = 2\pi R h$$

Algebra

Tre typer følger/rekker:

- **Aritmetiske**

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$$

$$\text{Rekursiv definisjon: } a_n = a_{n-1} + d$$

Sjekk: Er differansen mellom alle ledd konstant?

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots ?$$

- **Geometriske**

$$a_n = a_1 k^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad \rightarrow \quad S = \frac{a_1}{1 - k} \text{ når } n \rightarrow \infty, \text{ hvis } -1 < k < 1 \Leftrightarrow k^2 < 1$$

$$\text{Rekursiv definisjon: } a_n = a_{n-1} \cdot k$$

Sjekk: Er forholdet mellom to påfølgende ledd konstant?

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots ?$$

- **"Andre", eksempelvis:**

- Harmonisk følge: $a_n = \frac{1}{n}$. Tilsvarende rekke divergerer, selvom følgen er konvergent!

Eks: Er $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$ konvergent? Nei, fordi den bare er $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ mindre enn den harmoniske, og den øker over alle grenser. (Sammenligningskriteriet.)

- Trekanttallene, som er summen av n første heltallene: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
 $= \binom{n+1}{2}$ i Pascals trekant.

- Tetraedertallene, som er summen av n første trekantall: $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
 $= \binom{n+2}{3}$ i Pascals trekant.

- Kvadrattallene, som er summen av n første oddetall: $a_n = n^2 = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$

- Pyramidetallene, som er summen av de n første kvadrattallene:

$$a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

(Se lenger ned under lommeregner eller GeoGebra.)

Differanser

er ofte nyttige selv om følgen ikke er aritmetisk, så la oss generalisere litt:

Vi ser på a_n : 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...

Differanser av differanser: $\Delta^{(2)}(a_n)$	2	2	2	2	2	...		
Differanser: $\Delta(a_n) = d_i = a_{n+1} - a_n$	2	4	6	8	10	12	...	
Følge: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$	0	2	6	12	20	30	42	...
Sum: $A_n = A_1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$	0	0	2	8	20	40	70	112

(Obs: Summefølgene A_n litt forskjøvet i forhold til den vanlige rekken
 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = A_{n+1} - A_1$ for å få konsekvent system med differanser.)

- Differansene er en lineær funksjon (første grad)
- Differansene av differansene er en konstant funksjon (0te grad)
- Graden synker med en per differanse, altså må a_n være en andregradsfunksjon av n !
- Vi ser også at summefølgen A_n har a_n som differansefølge og derfor må være en tredjegradsfunksjon av n . Dermed er også $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ en tredjegradsfunksjon.
(Kjenner vi en A_n kan vi finne den vanlige rekkesummen ut fra:
 $A_{n+1} = A_1 + \sum_{i=1}^n a_i = A_1 + S_n \Leftrightarrow S_n = A_{n+1} - A_1$.)

Vi må altså bestemme a, b og c i $a_n = an^2 + bn + c$
eller a, b, c, d i $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Nok med tre punkter på funksjonsgrafene: $(1, 0), (2, 2), (3, 6)$ for å finne a_n med regresjon:
Ti-8x-kalkulatorer:

{1,2,3} STO>L1 Liste med uavhengig variabel n
{0,2,6} STO>L2 Liste med avhengig variabel a_n
STAT, CALC, 5:QuadReg L1,L2

eller i GeoGebra:

L={1,0),(2,2),(3,6)}
a(x)=regpoly[L,2]

Vi får: $a_n = n^2 - n = n(n - 1)$

Mer formelt har vi:

$$\Delta(A_n) = A_{n+1} - A_n = a_n$$

Da har vi at rekken:

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \dots + (A_{n+1} - A_n) = A_{n+1} - A_1$
da alle ledd unntatt A_1 og A_{n+1} forekommer to ganger med motsatt fortegn og derfor kanselleres!
Sagt på en annen måte:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = A_{n+1} - A_1, \text{ hvis } A_n \text{ oppfyller kravet } \Delta(A_n) = A_{n+1} - A_n = a_n$$

(Som minner om: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ og $F'(x) = f(x)$!)

Summering av rekker (når vi har funksjonsuttrykk):

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i, \text{ der } a_n = \frac{n(n+1)}{2}:$$

a(i):=n (n+1)/2

Sum(a(i),i,1,50) gir **22100** i GeoGebra

Sum(a(i),i,1,n) gir $\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$

Finne eksplisitt definisjon når vi har rekursiv definisjon:

Rekke har differanser som er kvadrattall, altså rekursiv definisjon

$$\{a_n = a_{n-1} + n^2, \quad a_1 = 1\} \text{ eller } \{a_{n+1} = a_n + (n+1)^2, \quad a_1 = 1\}$$

Differanser: $d_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2$

Formelen $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ gir da i GeoGebra CAS:

$$\mathbf{d(n):=(n+1)^2}$$

$$\mathbf{a(n):=1+Sum(d(i),i,1,n-1)} \quad \text{gir} \quad \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Praktiske oppgaver:

"Tabell-oppgaver":

Oppgaver med akkumulering av penger, medisin, dopingmidler, tilførsel av gift o.s.v.

Noe avtar med k i hver tidsenhet og en ny dose d tilføres i hver tidsenhet. Hvor mye akkumuleres over tid?

Rekursivt: $\{a_n = a_{n-1}k + d, a_1 = d\}$

Lag tabell:

1	2	3	4	...	n
d	dk	dk^2	dk^3	...	dk^{n-1}
	d	dk	dk^2	...	dk^{n-2}
		d	dk
			d	...	dk^2
					dk
					d

Akkumulert sum (siste kolonne): $a_n = d + dk + dk^2 + dk^{n-1}$,
geometrisk rekke med $a_1 = d$, k og n ledd slik at: $a_n = d \frac{k^n - 1}{k - 1}$.

En variant er når vi har en startverdi a istedenfor d , eksempelvis en dyrebestand der det skytes en fast kvote hvert år (d negativ) og vekstfaktoren i bestanden er k (ut fra fødte/døde): $\{a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1}k + d\}$

1	2	3	4	5	...	n
a	ak	ak^2	ak^3	ak^4	...	ak^{n-1}
	d	dk	dk^2	dk^3	...	dk^{n-2}
		d	dk	dk^2	...	dk^{n-3}
			d	dk
				d	...	dk^2
						dk
						d

Altså en geometrisk rekke ($d + dk + dk^2 + dk^{n-2}$) og et ledd ak^{n-1} , så vi får:

$$a_n = d \frac{k^{n-1} - 1}{k - 1} + ak^{n-1}$$

Variant av geometrisk rekke:

Vanlig geometrisk: $S_n = a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1}$

En variant: $S_n = a + 2ak + 3ak^2 + \dots + nak^{n-1}$

Også her er tabell lurt:

$$\begin{aligned} S_n &= a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} + \\ &\quad ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} + \\ &\quad ak^2 + \dots + ak^{n-1} + \\ &\quad \dots \\ &\quad + ak^{n-1} \end{aligned}$$

Radvis:

$$\begin{aligned} &= a \frac{k^n - 1}{k-1} + ak \frac{k^{n-1} - 1}{k-1} + ak^2 \frac{k^{n-2} - 1}{k-1} + ak^{n-1} \\ &= a \frac{k^n - 1}{k-1} + a \frac{k^n - k}{k-1} + a \frac{k^n - k^2}{k-1} + a \frac{k^n - k^{n-1}}{k-1} \\ &= \frac{a}{k-1} (nk^n - (1+k+k^2+\dots+k^{n-1})) \\ &= \frac{a}{k-1} (nk^n - \frac{k^n - 1}{k-1}) = \frac{a}{(k-1)^2} (nk^{n+1} - (n+1)k^n + 1) \end{aligned}$$

Økonomiske beregninger:

Stort sett ligninger med geometriske rekker: Tegn figurer/tabell som vist over og finn a_1, k og antall ledd, n !

Induksjonsbevis:

Eksempel: Vise at summen av n tall i følgen $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ er $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$n = 1 : \quad a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad S_1 = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{OK!}$$

$$n \text{ til } n+1 : \quad \text{Må vise at } S_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2} \text{ hvis vi antar at } S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + a_{n+1} &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \left(\frac{(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \right) = \\ &= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

Trigonometri

Tegn sirkler når dere arbeider med sinus, cosinus og tangens ligninger!

Husk at ligninger med $\sin x / \cos x / \tan x$ har to løsninger i hvert omløp, mens $\sin nx, \cos nx, \tan nx$ har $2n$ løsninger i hvert omløp.

$\sin x: x = \alpha \vee x = \pi - \alpha$ (Symmetrisk om x-aksen)

$\cos x: x = \alpha \vee x = 2\pi - \alpha$ (eller $-\alpha$) (Symmetrisk om y-aksen)

$\tan x: x = \alpha \vee x = \alpha + \pi$ (Symmetrisk om origo)

Eksakte trigonometriske verdier

v	0°	15°	18°	30°	45°	60°	72°	75°	90°
$\sin v$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\tan v$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$	∞

Vi må kunne sinus, cosinus og tangens for $0, 30, 45, 60$ og 90 grader i hodet. (Skader ikke å kjenne til $15, 18, 72$ og 75 også :-)

Absolutt vinkelmål:

$$v[^\circ] = \frac{180 \cdot v[rad]}{\pi}$$

$$v[rad] = \frac{\pi \cdot v[^\circ]}{180} \quad (v \text{ bare måltall her})$$

0°	15°	18°	30°	45°	60°	72°	75°	90°	180°	270°	360°
0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Trigonometriske omforminger

De formlene vi bør kjenne til er disse:

Sammenheng:	Hvorfor:
I: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	Trekant med hypotenus 1, Pythagoras
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$	"
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$	"
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	"
$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$	"
$\sin(\pi - x) = \sin x$	Definisjonssirkelen
$\cos(2\pi - x) = \cos x$	"
$\tan(x + \pi) = \tan x$	"
$\sin x = \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	Trekant: Sider 1, $\tan x$ og $\sqrt{1 + \tan^2 x}$
$\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	"
II: $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$	
III: $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	
IV: $\tan(u \pm v) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v}$	$\frac{1}{\text{II}}$ og divisjon med $\cos u \cos v$
V: $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v$ $= 2 \cos^2 v - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 v$	II med $u = v$ og deretter I (se 2.244)
VI: $\sin 2v = 2 \sin v \cos v$	III med $u = v$
$\tan 2v = \frac{2 \tan v}{1 - \tan^2 v}$	IV med $u = v$
VII: $\cos v = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2v}{2}}$	V løst m.h.p. $\cos v$
VIII: $\sin v = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2v}{2}}$	V løst m.h.p. $\sin v$

V→VII:

$$\cos 2v = 2 \cos^2 v - 1 \Leftrightarrow \cos^2 v = \frac{1 + \cos 2v}{2} \Leftrightarrow \cos v = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2v}{2}}$$

Kan også formuleres slik: (formel for halve vinkel)

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

V→VIII:

$$\cos 2v = 1 - 2 \sin^2 v \Leftrightarrow \sin^2 v = \frac{1 - \cos 2v}{2} \Leftrightarrow \sin v = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2v}{2}}$$

Kan også formuleres slik: (formel for halve vinkel)

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Funksjoner

Derivasjon:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$		

Generelle derivasjonsregler:

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$$

$$f(ax + b)' = af'(ax + b) \quad (\text{Vha. kjerneregel})$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{der} \quad u = g(x)$$

Periodiske funksjoner

$$a \sin(cx) + b \cos(cx) = d$$

kan gjøres om til:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin(cx + \varphi) = d, \text{ der } \tan \varphi = \frac{b}{a} \text{ og } \varphi \text{ er i kvadranten til punktet } (a, b).$$

eller

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cos(cx - \varphi) = d, \text{ der } \tan \varphi = \frac{a}{b} \text{ og } \varphi \text{ er i kvadranten til punktet } (b, a).$$

Konstruksjon av $f(x) = A \sin(cx + \varphi) + L = A \sin(c(x - \phi)) + L$ ut fra avlesningene:

$$T, f_{\max}, f_{\min} \text{ og faseforskyving } \phi (= \frac{\varphi}{c}):$$

$$\text{Amplitude: } A = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2}$$

$$\text{Likevektslinje: } L = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2}$$

$$\text{Omløpshastigheten: } c = \frac{2\pi}{T} \Leftarrow \text{Les av periode: } T = \frac{2\pi}{c}$$

$$\text{Faseforskyvning: } \varphi = c\phi \Leftarrow \text{Les av faseforskyving: } \phi = \frac{\varphi}{c}$$

(Hvis forskyvning ϕ er vanskelig å lese av, kan man lese av hvor $f(x_1) = d$ (krysning av likevektslinjen,

eventuelt $f(x_2) = f_{\min}$ eller $f(x_3) = f_{\max}$), og regne ut:

$$cx_1 + \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -cx_1 \text{ eventuelt } cx_2 + \varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ eller } cx_3 + \varphi = \frac{\pi}{2}.)$$

Modellering og regresjon:

Funksjonstype:	Lommeregner (TI):	GeoGebra (pre-release):
$f(x) = ax + b$	LinReg L1,L2	RegPoly[L,1]
$f(x) = ax^2 + bx + c$	QuadReg L1,L2	RegPoly[L,2]
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	CubicReg L1,L2	RegPoly[L,3]
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	QuartReg L1,L2	RegPoly[L,4]
$f(x) = a + b \ln x$	LnReg L1,L2	RegLog[L]
$f(x) = ae^{bx}$	ExpReg L1,L2	RegEksp[L]
$f(x) = ax^b$	PwrReg L1,L2	RegPot[L]
$f(x) = L + A \sin(cx + \varphi)$	SinReg L1,L2	RegSin[L]
$f(x) = \frac{a}{a+be^{cx}}$	Logistic L1,L2	RegLogist[L]

Integraler

Definisjon av ubestemt integral: $F(x) = \int f(x) dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Definisjon av bestemt integral (rektangler):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x, \quad \text{der} \quad x_i = a + (i-1)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Utregning i praksis: Fundamentalteoremet i analysen (funksjonslæren):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{der} \quad F'(x) = f(x)$$

Areal under kurve avgrenset av x -aksen, $f(x)$, $x = a$ og $x = b$: $A = \int_a^b f(x) dx$

Under x -akse: $A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

Mellom $f(x)$ og $g(x)$: $A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$, $f(x) > g(x)$ når $a \leq x \leq b$

Volum: $V = \int_a^b A(x) dx$, der $A(x)$ er formelen for arealet av en snittflate i romlegemet normalt på x -aksen.

Spesialtilfelle: Omdreiningslegeme: $A(x) = \pi(f(x))^2$ som gir: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Tilnærming: $A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, der $x_i = a + (i-1)\Delta x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$\sum_{i=1}^n a_n \approx \int_{-0.5}^{n+0.5} f(x) dx, \quad \text{der } a_n = f(n) \text{ og } f(n) \text{ er relativt stor ift. } \Delta x = 1.$$

Gjennomsnittsverdi: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Ubestemte integraler:

(Alle skal selvfølgelig i tillegg ha: "+C"!)

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
k	kx	$\frac{a}{x-b}$	$a \ln x-b $
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}, r \neq -1$	$\tan^2 x$	$\tan x - x$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x $	$\cos^2 x$	$\int (\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$
e^x	e^x	$\sin^2 x$	$\int (\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$...
$\ln x$	$x \ln x - x$		
$\sin x$	$-\cos x$		
$\cos x$	$\sin x$		
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		

Generelle formler og metoder:

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C \text{ der } F'(u) = f(u).$$

Delvis integrasjon: $\int u'v = uv - uv'$

Variabelskifte: $\int f(u)u'(x)dx = \int f(u)du, \quad \text{der } du = u'(x)dx$

Delbrøk: $\frac{a}{(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-b} + \frac{B}{x-c}$
(A og B finnes ved å løse ligningssystem.)

Familier av funksjonstyper:

Polynom	x, x^2, \dots
Eksponential	$5^x, e^{-3x}, \dots$
Logaritmer	$\log(x), \ln(x), \dots$
Trigonometri	$\sin(x), \cos(x), \tan(x), \dots$

Hvis vi har forskjellige familier representert i integralet (som produkt) ligger det an til *delvis* integrasjon!

Eksempler: $\int x \cos(x)dx, \int x^2 \ln(x)dx, \int e^x \sin(x)dx, \dots$

Valg av u og v : Velg v lik en funksjon som blir enklere etter derivasjon, eksempelvis x, x^2, \dots som blir en grad lavere hver gang eller $\ln(x)$, som blir $\frac{1}{x} = x^{-1}$ som ofte kan forkortes bort mot en annen x^n .

Hvis det er samme type funksjon, eller sammensatte funksjoner, ligger det an til *variabelskifte*.

Eksempler: $\int \cos^2(x) \sin(x)dx, \int \sqrt{\tan(x)} \frac{1}{\cos^2(x)} dx, \dots$

Valg av u : Let etter en del av uttrykket som er *den deriverte av en annen del* av uttrykket:
 $\int \cos^2(x) \sin(x) dx$: Her er $\sin(x)$ omtrent den deriverte av $\cos(x)$ (bortsett fra fortegn), altså:

$$u = \cos(x)$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin(x)}$$

Setter inn u og dx (ikke rør resten):

$$\int u^2 \sin(x) \frac{du}{-\sin(x)} = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

Delvis integrasjon:

Valg av u og v :

Velg v lik en funksjon som blir enklere etter derivasjon, eksempelvis x, x^2, \dots

som blir en grad lavere hver gang eller

$\ln(x)$, som har $\frac{1}{x} = x^{-1}$ som derivert, og $\frac{1}{x}$ kan ofte forkortes bort mot en annen x i x^n .

Tre viktige eksempler:

Eksempel 1:

Polynomfunksjoner (x^n) blir enklere ved derivasjon og er derfor kandidater for v :

$$I = \int x \cdot \sin(x) dx \quad u' = \sin(x) \Rightarrow u = -\cos(x), \quad v = x \Rightarrow v' = 1$$

$$I = -\cos(x)x - \int (-\cos(x))1 dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C$$

Eksempel 2

Logaritmefunksjoner blir enklere ved derivasjon og er derfor kandidater for v :

$$I = \int x^3 \ln(x) dx \quad u' = x^3 \Rightarrow u = \frac{x^4}{4}, \quad v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$$

$$I = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

Eksempel 3:

Ekspontialfunksjoner og trigonometriske funksjoner "gjentar seg" og vi må derfor gjøre delvis integrasjon i "to runder":

$$I = \int e^x \sin(x) dx \quad u' = e^x \Rightarrow u = e^x, \quad v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$$

$$1) \quad I = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - I_2$$

$$2) \quad I_2 = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + I$$

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) \Leftrightarrow 2I = e^x \sin x - e^x \cos x \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + C$$

Differensialligninger

Eksakte DL: (6.1)

Differensialligninger som kan løses direkte ved integrering:

$$y' = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \int f(x) dx$$

Separable: (6.3)

Differensialligninger som kan omformes til: $f(y)y' = g(x)$

Integrasjon og kjernerregel gir løsning:

$$\int f(y)y' dx = \int g(x) dx \Leftrightarrow \int f(y) dy = \int g(x) dx \Leftrightarrow F(y) = G(x) + C,$$

der $F'(y) = f(y)$ og $G'(x) = g(x)$

Integrerende faktor: (6.4)

Lineære differensialligninger på formen: $y' + p(x)y = q(x)$

$$IF = e^{\int p(x) dx} = e^{P(x)}, \quad \text{der } P'(x) = p(x)$$

Multiplikasjonsregel gir igjen:

$$y'e^{P(x)} + ye^{P(x)}p(x) = q(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow (ye^{P(x)})' = q(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow$$

$$ye^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)} dx \Leftrightarrow y = e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)} dx$$

Bruk av derivasjonsreglene for produkt og brøk:

$$xy' + y = f(x) \Leftrightarrow (xy)' = f(x) \Leftrightarrow xy = \int f(x) dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \int f(x) dx$$

$$xy' - y = f(x) \Leftrightarrow \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow y = x \int \frac{f(x)}{x^2} dx$$

(Hvis man har y^2 på høyre side: $xy' - y = f(x)y^2$, kan også

$$\frac{y - xy'}{y^2} = -f(x) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)' = -f(x) \text{ være aktuell.})$$

Med n heltallig går også:

$$xy' + ny = f(x) \Leftrightarrow x^n y' + nx^{n-1}y = f(x)x^{n-1} \Leftrightarrow (x^n y)' = f(x)x^{n-1} \Leftrightarrow y = x^{-n} \int f(x)x^{n-1} dx$$

$$xy' - ny = f(x) \Leftrightarrow \frac{x^n y' - nx^{n-1}y}{(x^n)^2} = f(x) \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x^n}\right)' = f(x) \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \Leftrightarrow y = x^{-n} \int f(x) \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} dx$$

(Hvis n ikke er heltall, bruk integrerende faktor eller se Cauchy/Euler lenger ned.)

Andre ordens differensialligninger

Standardtilfellet med konstante koeffisienter

$y'' + ay' + b = 0$ har løsningen:

$y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$	hvis $r^2 + ar + b = 0$ har to løsninger r_1 og r_2 .
$y = (Cx + D)e^{r_1x}$	hvis $r^2 + ar + b = 0$ bare har en løsning r_1 .
$y = e^{\alpha x}(C \sin \beta x + D \cos \beta x)$	hvis $r^2 + ar + b = 0$ har komplekse løsninger $\alpha \pm \beta i$.

(Obs: βi opptrer alltid i par ($\pm \beta i$), så hvis det er komplekse løsninger, så er begge løsningene komplekse!

Vi kan ikke få en reell og en kompleks løsning!)

Reduksjon av orden når y -leddet mangler

Eksempel med tredjeordens lineær ligning:

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

Når y mangler kan vi skifte til $u = y'$ og får en ny ligning av andre orden:

$$u'' + 2u' + u = 0$$

Eksempel: $y'' + (y')^2 = 0$

$u = y'$ gir: $u' + u^2 = 0$ som er førsteordens og separabel:

$$\int \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int dx \Leftrightarrow u^{-1} = x + D \Leftrightarrow u = \frac{1}{x+D}$$

Tilbake til y :

$$y' = \frac{1}{x+D} \Leftrightarrow y = \int \frac{1}{x+D} dx = \ln|x + D| + E = \ln|x + C_1| + C_2$$

Ligninger med potenser av y'

$(y')^2 - 3x(y') + 2x^2 = 0$ er ulineær og våre metoder hittil takler ikke dette.

Men, det er en annengradslikning i y' , så vi har:

$$(y' - x)(y' - 2x) = 0 \Leftrightarrow y' = x \vee y' = 2x$$

som gir oss to løsninger: $y = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \vee y = \int 2x dx = x^2 + D$

Diverse triks med variabelskifte:

Innføre $2yy' = (y^2)' = u'$, $u = y^2$

$$yy' = x + xy^2 \quad (y^2)' = 2x + 2xy^2 \Leftrightarrow u' = 2x + 2xu \Leftrightarrow u' - 2xu = 2x \quad IF = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$$

$$(ue^{-x^2})' = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow ue^{-x^2} = \int 2xe^{-x^2} dx = C - e^{-x^2}$$

$$u = Ce^{x^2} - 1 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{Ce^{x^2} - 1}$$

Flere triks

(Ikke i læreplan, men kan kanskje dukke opp varianter av dette på eksamen?)

(Kan også være verdt å ta vare på hvis man skal studere matematikk på universitetet, da ikke alle disse triksene er nevnt i standardverkene.)

*****Bernoulli's ligning:**

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

Multiplikasjon med $(1-n)y^{-n}$ gir:

$$(1-n)y^{-n}y' + p(x)(1-n)y^{-n+1} = q(x)(1-n)$$

Vi gjør et variabelskifte: $u = y^{1-n}$ som har $u' = (1-n)y^{-n}y'$ og får derfor:

$$u' + p(x)(1-n)u = q(x)(1-n) \quad \text{som kan løses med integrerende faktor.}$$

(Poenget er at vi har klart å fjerne y fra høyre siden i den lineære ligningen!)

Eksempel:

$$y' + xy = y^3 \quad \text{Multipliserer med } (1-n)y^{-n} = -2y^{-3}$$

$$-2y^{-3}y' - 2xy^{-2} = -2$$

$$u' - 2xu = -2 \quad \text{som løses med integrerende faktor.}$$

*****Cauchy/Euler ligningen:**

$$xy' + f(x)y = g(x)$$

Variabelskifte:

$$x = e^u \Leftrightarrow u = \ln x \quad \text{som gir:}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{1}{x} = y'_u \frac{1}{x}$$

Kan da gjøre om til:

$$xy'_u \frac{1}{x} + f(x)y = g(x) \quad \text{eller} \quad y'_u + f(e^u)y = g(e^u) \quad \text{Har skiftet ut } x \text{ med } u.$$

*****Homogene i x og y**

(Her betyr "homogen" noen annet enn at differensialligningen har 0 på høyre side...)

$y' = f(x, y)$ der alle ledd har samme samlede potens av x og y slik at vi kan gjøre om til

$y' = f(v)$ ved å innføre $v = \frac{y}{x}$ etter å ha dividert alle ledd med en passende x^n .

Da har vi: $y = vx$ og $y' = xv' + v$ og får derfor:

$$xv' + v = f(v) \Leftrightarrow \int \frac{1}{f(v)-v} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

Eksempel:

$$y' = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} \Leftrightarrow xv' + v = \frac{v}{1+v^2}, \quad v = \frac{y}{x}, \quad y' = xv' + v$$

$$xv' = \frac{v}{1+v^2} - \frac{v+v^3}{1+v^2} = \frac{-v^3}{1+v^2} \Leftrightarrow \int \frac{1+v^2}{1+v^2} dv = -\int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$\int (v^{-3} + v^{-1}) dv = \int x^{-1} dx \Leftrightarrow -\frac{v^{-2}}{2} + \ln|v| = \ln|x| + D \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{y^2} = 2 \ln \frac{y}{x} + 2 \ln x + 2 \ln E \quad (\text{Ikke eksplisitt, men ligning for løsningskurve.})$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \ln Cy^2 \Leftrightarrow x = \pm y \sqrt{\ln Cy^2} \quad (\text{Kan altså løse som } x = f(y))$$

*****Løse med hensyn på y og derivere**

$y = f(x, y')$ blir da $y' = g(x, y', y'')$ som ikke inneholder y og derfor

kan reduseres til en ny førsteordens ligning:

$$u = g(x, u, u') \text{ med } u = y' \text{ og } u' = y''$$

Denne *kan* være enklere å løse enn den opprinnelige.

*****Løse med hensyn på y' og derivere**

Får da $y'' = g(x, y, y', y'')$.

Hvis dette skal ha noen hensikt må x eller y falle bort i derivasjonen.

Hvis y faller bort får vi $u' = (x, u, u')$ med $u = y'$ som ny variabel.

Hvis x faller bort får vi $u' = (y, u, u \cdot u'_y)$ med $u = y'$ og $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u'_y u$

*****Skifte fra x til y som uavhengig variabel**

Eksempel: $y' = \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = x + y \Leftrightarrow x'_y - x = y$

Løsning: $x = Ce^y - y - 1$ (Ligning i x og y .)

***Reduksjon av orden når vi kjenner en spesiell løsning

Denne metoden er også den mest kjente for å takle andreordens differensialligninger som *ikke har konstante koeffisienter!*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Hvis vi kjenner en spesiell løsning y_0 (som vi ser er løsning eller skjønner er løsning ut fra et praktisk eksempel), så kan vi innføre $y = u \cdot y_0$ og kan da skifte til variabelen u :

$u''y_0 + (2y'_0 + p(x)y_0)u' = 0$ som er en ligning uten u og derfor kan reduseres til en første ordens ligning:

$$y_0v' + (2y'_0 + p(x)y_0)v = 0 \quad \text{der } v = u' \text{ og } y = u \cdot y_0$$

***Innføring av $u = (y')^2$ i ulineære andreordens ligninger

Hvis vi har ledd med $y''y'$ og $(y')^2$ kan vi skifte til variabelen

$$u = (y')^2, \quad \text{der } u' = 2y'y''$$

(Kan eventuelt lage en slik ligning ved å multiplisere med y' .)

Eksempel:

$$y''y' - y^2 = 0 \Leftrightarrow u' - 2u = 0$$

Dette trikset fungerer best hvis x eller y ikke forekommer, men ofte kan man få integraler av typen

$$y = \pm \int \sqrt{f(x)} dx \text{ som er vanskelige å løse når man går tilbake til } y \text{ fra } u...$$

***Autonom ligning - x mangler

$$f(y, y', y'') = 0$$

$$\text{Innfører } y' = u \quad \text{og} \quad y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u'_y u$$

Da får vi $f(y, u, u \cdot u'_y) = 0$, som er førsteordens med y som uavhengig variabel.