# R2 - Løsningsskisser til noen oppgaver i kapittel 4.1 og 4.2

### 405, 406, 411, 413, 419, 420, 422, 424

*Versjon: 04.11.14*

## 405

a) Kjerneregel: $f(x) = \sin(u), u = x^2 - 2x$
$f'(x) = \cos(u)(2x-2) = (2x-2)\cos(x^2-2x)$

b) Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$
$f'(x) = \cos x \cos^2 x + \sin x \cdot 2\cos x(-\sin x)$ (Kjerneregel på: $\cos^2 x = u^2, u = \cos x$ )
$= \cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x) = \cos x(\cos^2 x - 2(1-\cos^2 x))$
$= \cos x(\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x) = \cos x(3\cos^2 x - 2)$

**Bruk av GeoGebra CAS**:
f(x):=sin(x ^2-2 x) Definer alltid funksjoner i CAS, vil bli grafet i grafdelen også,
hvis man trenger graf eller etterfølgende numeriske beregninger!
f'(x) Gir den deriverte.
TrigForenkle[ f'(x) ] Gir litt nærmere vår form: 3cos$^3$(x)-2 cos(x), kan eventuelt brukeFaktoriser-knappen (  ) til slutt.



## 406

a) Brøkregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$f'(x) = \frac{(\cos x - \sin x)\sin x - (\sin x + \cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x \sin x - \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$

c) Brøkregel: $f'(x) = \frac{(\tan^2 x + 1)(1+\tan x) - \tan x(\tan^2 x + 1)}{(1+\tan x)^2} = \frac{(\tan^2 x+1)(1+\tan x - \tan x)}{(1+\tan x)^2} = \frac{\tan^2 x + 1}{(1+\tan x)^2}$

Eventuelt videre: $\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1}{(1+\frac{\sin x}{\cos x})^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x} = \frac{1}{2\sin x\cos x + 1} = \frac{1}{\sin 2x + 1}$

**Bruk av Geogebra CAS**:
f(x):=tan(x)/(tan(x)+1)
TrigForenkle[ f'(x) ] gir: $\frac{1}{2\sin x \cos x + 1}$
TrigKombiner[ f'(x) ] gir $\frac{1}{\sin(2\,x)+1}$

## 411

$f(x) = 4\sin x + 3\cos x, \qquad D_f = [0, 2\pi\rangle$

Omformer: $\sqrt{4^2+3^2}\,\sin(x+\varphi)$, $\quad \tan\varphi = \frac{3}{4}$, $\quad \varphi \in$ Kvadrant 1 $\quad$ ): $\varphi = 0.644$

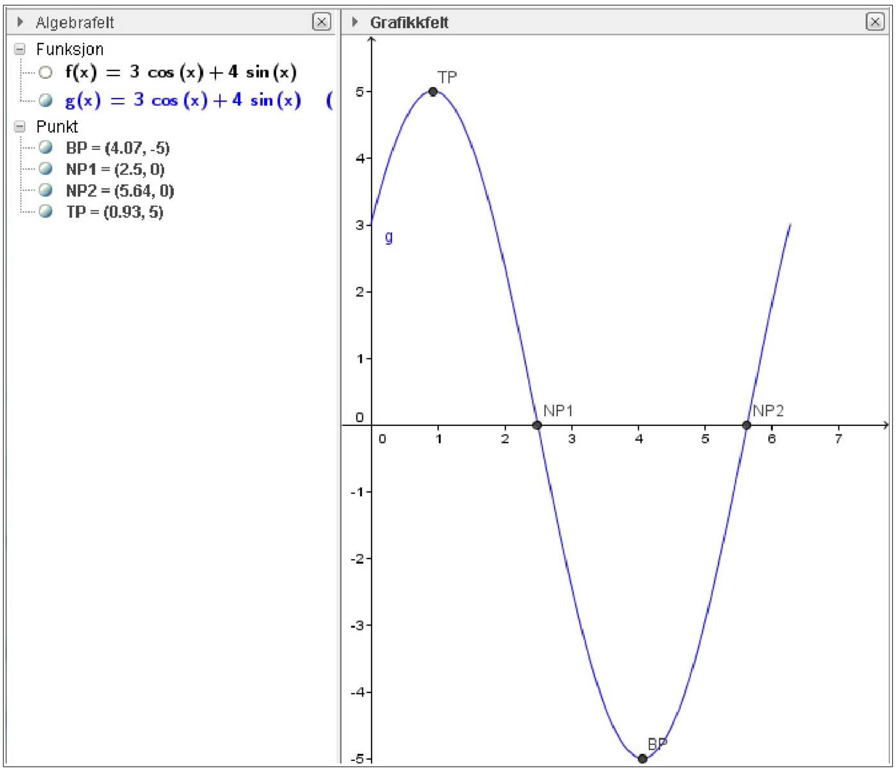
$f(x) = 5\sin(x+0.644)$

(Altså ikke nødvendig å derivere for å finne topp- og bunn-punkter.)

a) Nullpunkter:
$x+0.644 = 0+k\pi \Leftrightarrow x = -0.644+k\pi$
): $(2.50, 0), (5.64, 0)$
Topp-pkt: $\quad x+0.644 = \frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x = -0.644+\frac{\pi}{2}+k2\pi$
): $(0.927, 5)$

Bunn-pkt: $\quad x+0.644 = \frac{3\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x = 4.07+k2\pi$
): $(4.07, -5)$

**b) I Geogebra**:




**Inntastinger**:

f(x):=3 cos(x) + 4 sin(x) — Definerer i CAS, blir grafet i grafdel.

g(x)=Funksjon[f(x) ,0,2$\pi$] — Kan begrense i Grafisk del til $[0, 2\pi\rangle$ for å få riktig graf.

TrigKombiner[ f(x) ] — Gir: 5 cos(x-atan(4/3)), eller 5 cos(-0.93+x) hvis man bruker tilnærmet-knappen.

NP1:=Nullpunkt[f,2,4] — Finner nullpunkt i intervall, eller f'(x)=0 og
NP2:=Nullpunkt[f,4,6]

f'(x) Finner f'(x)

f'(x) = 0 $\boxed{x\approx}$ - knappen gir {-2.21, x=0.93}

TP:=Ekstremalpunkt[f,0,2] eller (TP:=(0.93,f(0.93)) gir (0.93,5)

BP:=Ekstremalpunkt[f,2,6] eller BP:=(-2.21+2 pi,f(-2.21+2 pi)) gir (4.07,-5)

c) Vi har transformert $a\sin x + b\cos x$ til $A\sin(x+\varphi)$
Det finnes en tilsvarende transformasjon til cosinus:
$\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$, med $\tan\varphi = \frac{a}{b}$ (omvendt av sinus-transformasjonen!)
Så vi får:
$f(x) = 5\cos(x-0.927)$

Vi kunne også tatt utgangspunkt i den vi har: $f(x) = 5\sin(x+0.644)$
og brukt: $f(x) = 5\cos(\frac{\pi}{2}-(x+0.644)) = 5\cos(-x+0.927)$
Da $\cos(x) = \cos(-x)$, kan vi gjøre om til: $f(x) = 5\cos(x-0.927)$

# 413

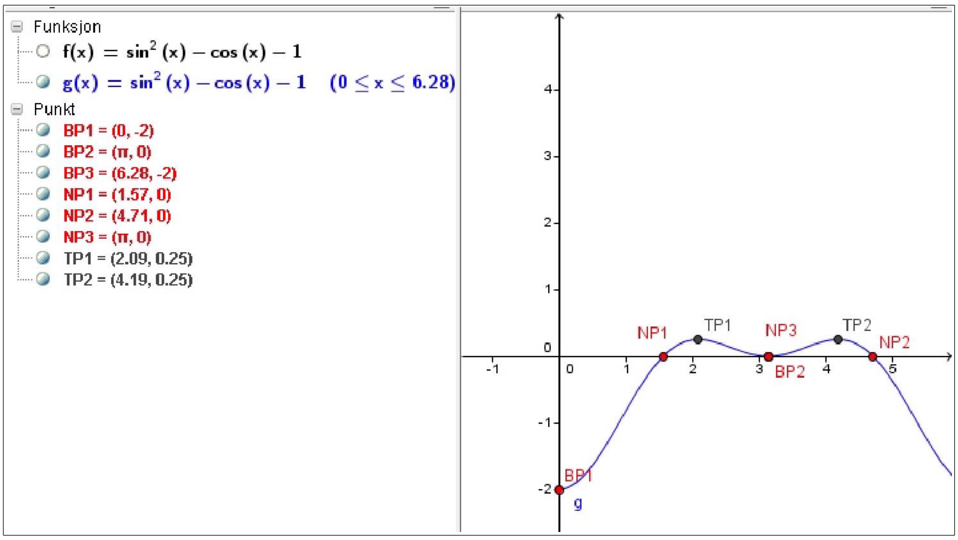
$f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1, \qquad D_f = [0,2\pi]$

a)
Lurt å gjøre om:
$f(x) = 1-\cos^2 x - \cos x - 1 = -\cos^2 x - \cos x = -\cos x(\cos x + 1)$

Nullpunkter: $f(x) = 0$
$\cos x = 0 \vee \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + k2\pi$
): $(\frac{\pi}{2},0),(\pi,0),(\frac{3\pi}{2},0)$

b) Kjerneregel på $\sin^2 x = u^2, u = \sin x$ gir:
$f'(x) = 2\sin x\cos x - (-\sin x) = 2\sin x\cos x + \sin x = 2\sin x(\cos x + \frac{1}{2})$
Ekstremalpunkter gitt av: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow$
$$x = 0 + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = (2\pi - \frac{2\pi}{3}) + k2\pi$$
):
BP:
$(0,f(0)) = (0,-2)$
$(\pi,f(\pi)) = (\pi,0)$
$(2\pi,f(2\pi)) = (2\pi,-2)$
TP: $(\frac{2\pi}{3},f(\frac{2\pi}{3})) = (\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4})$
$(\frac{5\pi}{3},f(\frac{5\pi}{3})) = (\frac{4\pi}{3},\frac{1}{4})$

**c) Med GeoGebra**:




**Inntasting**:

f(x):=(sin(x)) ^2-cos(x)-1

g(x)=Funksjon[f,0,2$\pi$] For å begrense til definisjonsområdet i grafen

NP1=Nullpunkt[f,1,2] Eller: f(x) = 0 og $\boxed{\text{x=}}$-knappen

NP2=Nullpunktt[f,4,5]

Nullpunkt[f,3,4] finner ikke ($\pi$,0), da dette punktet tangerer x-aksen, litt dumt, men regning eller

*f(x) = 0 og* $\boxed{\text{x=}}$*-knappen* viser at det blir:

NP3=($\pi$,0)

f'(x)=0 og $\boxed{\text{x=}}$-knappen gir: $\{x=2k_1\pi+\frac{2}{3}\pi, x=2k_2\pi-\frac{2}{3}\pi, x=2k_3\pi+\pi, x=2k_4\pi\}$

BP1=(0,f(0))
BP2=(pi,f(pi))
BP3=(2 pi,f(2 pi))

TP1 = Ekstremalpunkt[f,1,3] eller TP1=(2 pi/3,f(2 pi/3))
TP2 = Ekstremalpunkt[f,3.5,5] eller TP2=(4 pi/3, f(4 pi/3))

# 419

$g(x) = \frac{x^2-4}{x} = x - \frac{4}{x}$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

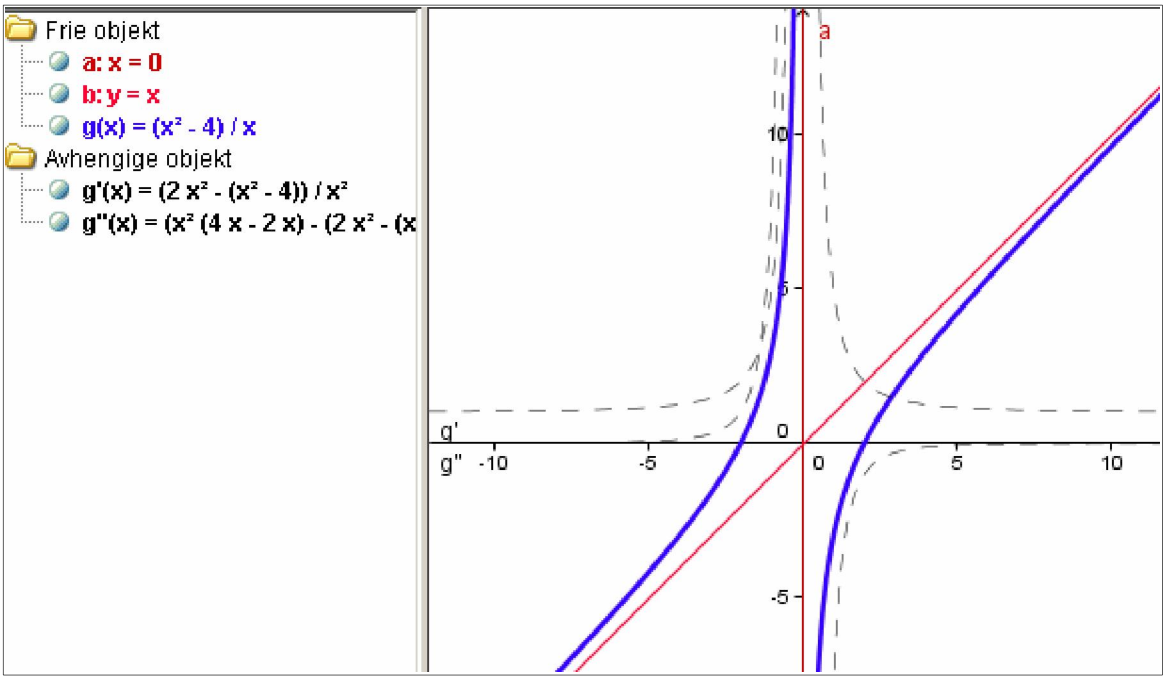
a) $x \to 0 \Rightarrow g(x) \to \pm\infty$ ): VA: $x = 0$
$x \to \pm\infty \Rightarrow g(x) - x \to 0$ ): SA: $y = x$
(Ingen horisontal, bare skrå asymptote.)

b) $g(x) = x - 4x^{-1}$
$g'(x) = 1 + 4x^{-2} = 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2+4}{x^2}$
$g(x)$ voksende i begge intervaller, da $g'(x)$ alltid er positiv.

c) $g''(x) = 0 - 8x^{-3} = -\frac{8}{x^3}$
Hule side opp i $\langle\leftarrow, 0\rangle$ og hule side ned i $\langle 0, \rightarrow\rangle$

d) Ingen vendepunkt, da $g(0)$ ikke er definert.

e) **GeoGebra**:




**Inntastinger**:

Funksjon:

g(x):=(x ^2-4)/x

Asymptoter:

x=0

y=x Senere versjoner av GGB finner direkte med kommandoen: *Asymptote[ f ]*

Derivert:

g'(x)

Dobbelderivert:

g''(x) Senere versjoner av GGB forenkler bedre enn vist i grafen over.

# 420

$f(x) = x - \ln(2x+2)$

a) $D_f = \langle -1, \rightarrow \rangle$ (fordi $2x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$)

VA: $x = -1$ (fordi $x \to -1 \Rightarrow f(x) \to \infty$)

b) $f(x) = x - \ln(u), u = 2x+2$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{u}2 = 1 - \frac{2}{2x+2} = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

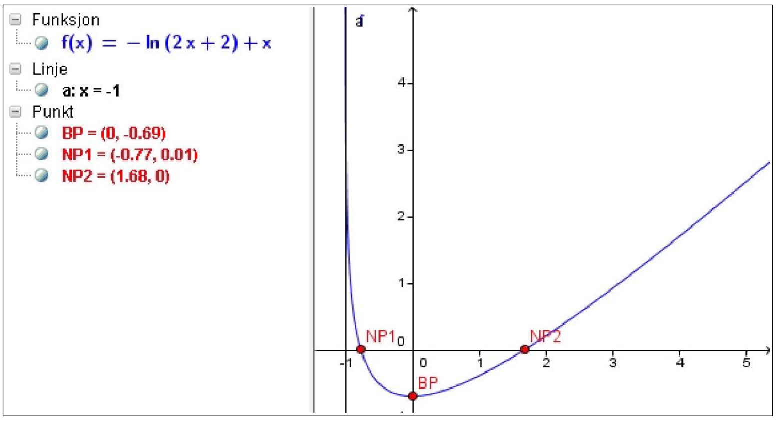
c) Voksende: $f'(x) > 0$ når $x > 0$ ): $\langle 0, \rightarrow \rangle$

Avtagende: $f'(x) < 0$ når $x < 0$ ): $\langle -1, 0 \rangle$

d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ): BP: $(0, f(0)) = (0, -\ln 2) \approx (0, -0.693)$

$f''(x) = \frac{1(x+1) - x(1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ ): Alltid positiv, så hul side opp i hele definisjonsmengde, ingen vendepunkt

**GeoGebra**:




**Inntastinger**:

f(x):=x-ln(2 x+2)
x=-1
f(x)=0 og $\boxed{x\approx}$ -knappen, som gir: {x=-0.77,x=1.68}
NP1=(-0.77,f(-0.77))
NP2=(1.68,f(1.68))

f''(x)=0 og $\boxed{x=}$ -knappen gir: {x=0}
BP=(0,f(0))

# 422

$f(x) = 1 - x + 2\sin x, \qquad D_f = \langle -2\pi, 2\pi \rangle$ (Åpent intervall, ingen ekstremalpunkt i endepunkter.)

a) $f'(x) = -1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi$

TP:

$(\frac{\pi}{3} - 2\pi, f(\frac{\pi}{3} - 2\pi)) = (-5.24, 7.97)$

$(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3})) = (1.05, 1.68)$

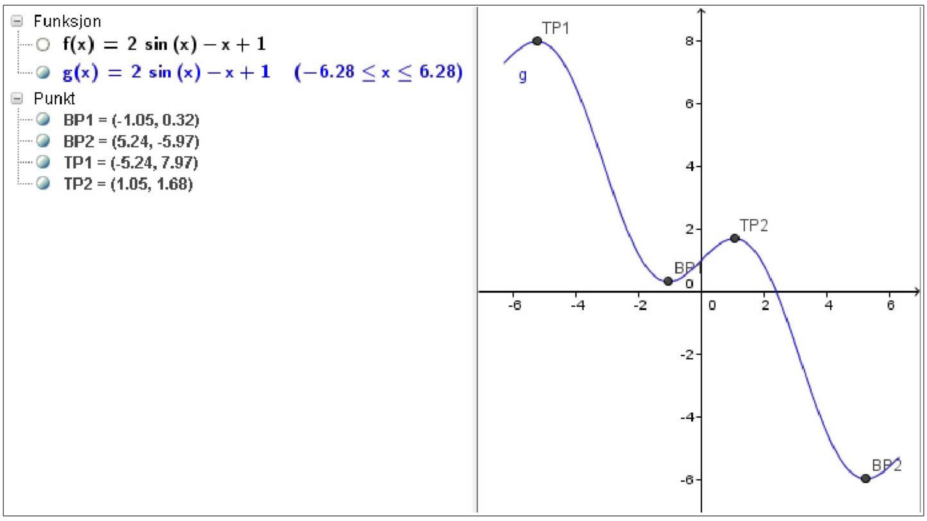
BP:

$(\frac{5\pi}{3} - 2\pi, f(\frac{5\pi}{3} - 2\pi)) = (-1.05, 0.315)$

$(\frac{5\pi}{3}, f(\frac{5\pi}{3})) = (5.24, -5.97)$

b)

**GeoGebra**:




**Inntastinger**:

f(x):=1-x+2 sin(x)

g(x)=Funksjon[f,-2 pi,2 pi] Tegne bare i definisjonsområdet

y=1-x (Tegnet inn for å vise at det er denne linjen det svinger rundt.)

f'(x)=0 og $\boxed{\text{x=}}$ -knappen gir: $\{x=2k-\frac{1}{3}\pi, x=2k+\frac{1}{3}\pi\}$

TP1=(pi/3-2 pi, f(pi/3-2 pi))
TP2=(pi/3, f(pi/3))
BP1=(-pi/3,f(-pi/3))
BP2=(-pi/3+2 pi, f(-pi/3+2 pi))

# 424

$f(x) = 5e^{-0.2x}\sin x, \qquad D_f = [0, 2\pi\rangle$

a) Enkelt...

b) Eksponentialfunksjon alltid positiv, så fortegnet følger $\sin x$.

c) $5e^{-0.2x}\sin x = 2\sin x \Leftrightarrow 5e^{-0.2x}\sin x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(5e^{-0.2x} - 2) = 0$

Viktig ikke å forkorte bort $\sin x$ her!!!

$\sin x = 0 \vee 5e^{-0.2x} = 2$

$x = 0 + k\pi \vee x = \frac{\ln\frac{2}{5}}{-0.2} \Leftrightarrow x = 0 + k\pi \vee x = 4.58$

$L = \{0, \pi.4.58\}$

d) Deriverer med produktregel og kjerneregel på $e^u, u = -0.2x$

$f'(x) = 5e^{-0.2x}(-0.2)\sin x + 5e^{0.2x}\cos x = -e^{-0.2x}\sin x + 5e^{-0.2x}\cos x$

$= e^{-0.2x}(5\cos x - \sin x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x + 5\cos x = 0$ (Eksponentialfunksjon alltid positiv.)

$\Leftrightarrow$

$\sqrt{1^2 + 5^2}\,\sin(x + \varphi) = 0, \qquad \tan\varphi = \frac{5}{-1} \wedge \varphi$ i 2dre kvadrant$\Leftrightarrow \varphi = 1.77$

$\Leftrightarrow x + 1.77 = 0 + k\pi \Leftrightarrow x = -1.77 + k\pi$

TP:

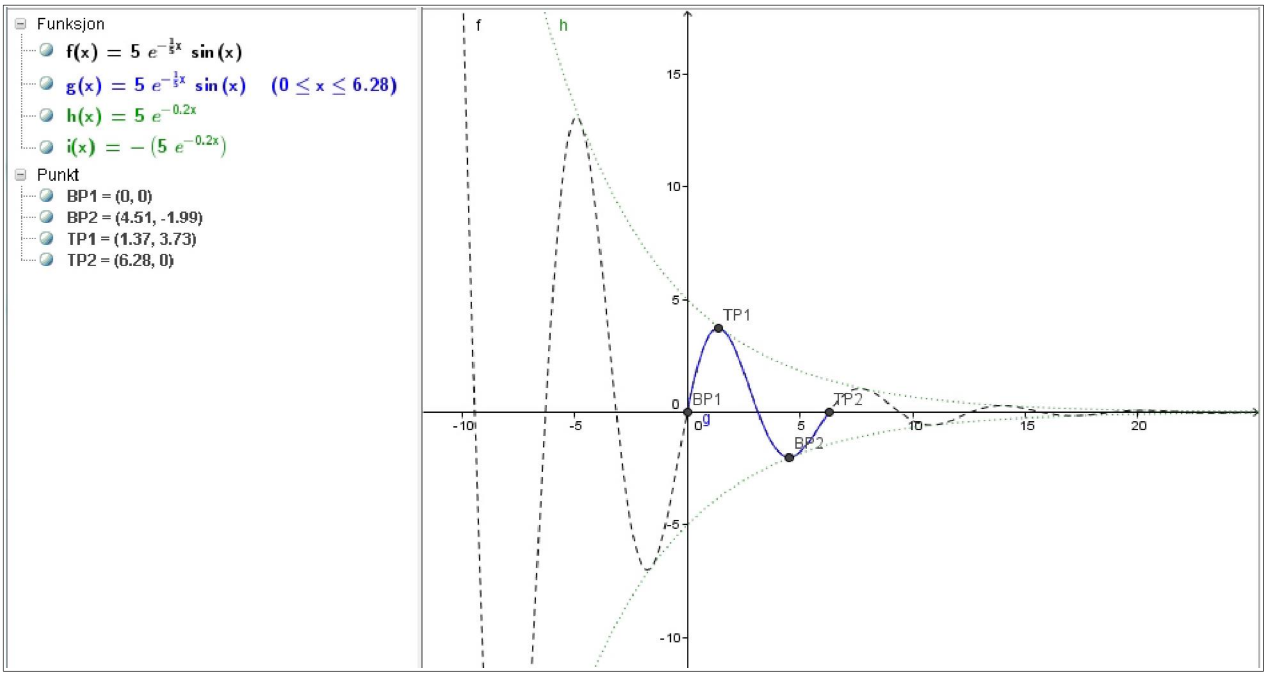
$(-1.77 + \pi, f(-1.77 + \pi)) = (1.37, 3.73)$

BP:

$(0, f(0)) = (0, 0)$

$(-1.77 + 2\pi, f(-1.77 + 2\pi)) = (4.51, -1.99)$

**GeoGebra**:




**Inntastinger**:

f(x):=5 exp(-0.2 x) sin(x)

For å avgrense til definisjonsmengden i grafen:

g(x)=Funksjon[5exp(-0.2x)sin(x),0,2$\pi$]

For å få frem "trakten" og hvordan det ville sett ut med større definisjonsmengde, omhyllingskurver:

h(x)=5exp(-0.2x)

i(x)=-g(x)

Nullpunkter:

f(x)=0 og $\boxed{x=}$ -knappen gir: {x=k pi }  (som for bare sin(x)!)

Ekstremalpunkter:

f'(x)=0 og $\boxed{x\approx}$ -knappen gir: {... x= ..., x=1.37, x=4.51, ... }

BP1=(0,f(0))

BP2=(4.51, f(4.51) )

TP1=(1.37, f(1.37) )

TP2=(2 pi, f(2 pi) )