R1 - Kapittel 5: Funksjoner

27.01.12
Løsningsskisser

I

Deriver funksjonene:
a) $\sin^3 x$ b) $\sin x \tan x$ c) $\frac{\sin x}{x}$

a) Kjerneregel: $\sin^3 x = u^3, \qquad u = \sin x$
$(\sin^3 x)' = 3u^2 \cos x = 3\sin^2 \cos x$

b) Produktregel: $\cos x \tan x + \sin x \frac{1}{\cos^2 x} = \cos x \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \sin x + \frac{\tan x}{\cos x}$

c) Brøkregel: $\frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

II

Gitt funksjonen $f(x) = 11 + 4\sin(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}), \qquad x \in [0, 12]$
Finn eventuelle nullpunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter ved regning.
(Uten å derivere, selvsagt.)

Ingen nullpunkter, da $f(x) \in [11 - 4, 11 + 4] = [7, 15]$

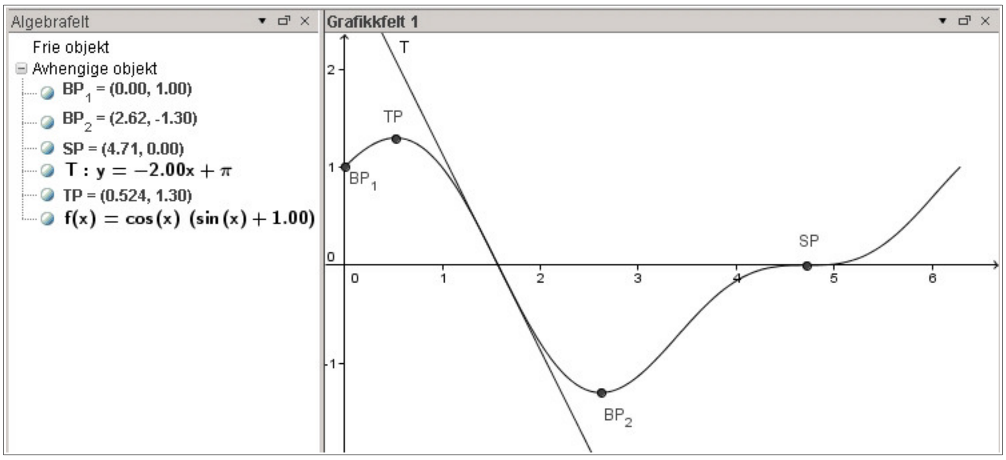
Ekstremalpunkter:
Topp-punkt: $\sin(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = k12$
): $(0, 15), (12, 15)$

Bunn-punkt: $\sin(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = 6 + k12$
): $(6, 7)$
(Eller midt mellom topp-punkter.)

Vendepunkter: $\sin(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2} = 0 + k\pi \Leftrightarrow x = -3 + k6$
): $(3, 11), (9, 11)$

III

Gitt funksjonen $f(x) = \cos x(\sin x + 1), \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$
a) Finn ved regning funksjonens nullpunkter.
b) Finn ved regning funksjonens ekstremalpunkter.
c) Finn ved regning funksjonens vendepunkter.
d) Finn ved regning funksjonens vendetangent i det første vendepunktet.



a) NP: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$

): $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, 0)$

b) EP: $f'(x) = 0$

Produktregel: $f'(x) = -\sin x(\sin x + 1) + \cos x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x =$
$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x = 1 - \sin x - 2\sin^2 x$

$1 - \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow -2u^2 - u + 1 = 0, u = \sin x \Leftrightarrow$
$u = -1 \vee u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi$

): Topp-punkt: $(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{4}) \approx (0.524, 1.30)$
Bunn-punkt: $(0, 1), (\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}) \approx (2.62, -1.30)$

($x = \frac{3\pi}{2}$ gir et sadel-punkt, ikke et ekstremalpunkt.)

c)

Vendepunkt: $f''(x) = 0$

Kjerneregel: $f''(x) = -\cos x - 2 \cdot 2\sin x \cos x = -4\cos x(\sin x + \frac{1}{4})$

$-4\cos x(\sin x + \frac{1}{4}) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -0.253 + k2\pi \vee x = \pi - (-0.253) + k2\pi$
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -0.253 + k2\pi \vee x = 3.39 + k2\pi$

): $(\frac{\pi}{2}, 0), (3.39, -0.731), (\frac{3\pi}{2}, 0), (6.03, 0.726)$

d) Ett-punkts-formel: $y - 0 = f'(\frac{\pi}{2})\,(x - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow$
$y = -2(x - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow$
$y = -2x + \pi$

IV

I 1859 innførte en engelskmann 24 kaniner til Australia. Ti år senere var bestanden oppe i 2 millioner kaniner og kaninene var i ferd med å bli en landeplage.

En eksponentialfunksjon på formen $K(t) = N_0 e^{kt}$, der t er år etter 1859, er en muig modell for denne bestandsutviklingen.
a) Bruk opplysningene til å finne N_0 og k i denne matematiske modellen, enten ved regning eller ved hjelp av kurvetilpasning på lommeregneren.
(Lommeregner gir eksponentialfunksjonen på formen $N_0 a^t$ der $a = e^k \Leftrightarrow k = \ln a$.)
b) Hvor mange prosent øker bestanden med hvert år etter denne modellen?
c) I hvilket år var bestanden opp i 2 millioner individer etter denne modellen?
d) Hvor mange kaniner hadde vi i Australia i 1900 etter denne modellen?
Kommenter svaret.

a) 1859: $t = 0$ gir 24 kaniner: $N_0 e^{k0} = 24 \Leftrightarrow N_0 = 24$
1869: $t = 10$ gir 2000000 kaniner: $24e^{k10} = 2000000 \Leftrightarrow$
$e^{k10} = \frac{2000000}{24} \Leftrightarrow k = \frac{\ln \frac{2000000}{24}}{10} = 1.133$

): $K(t) = 24e^{1.133t}$ (Tar med fire siffer, da e^{kx} er følsom for unøyaktigheter.)

b) $24e^{1.133t} = 24(e^{1.133})^t = 24 \cdot 3.11^t$
Vekstfaktor 3.11, altså over tredobling per år eller
en prosentvis økning på 211% i året!

c) $24 \cdot 3.11^t = 1000000 \Leftrightarrow 3.11^t = \frac{1000000}{24} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{1000000}{24}}{\ln 3.11} \approx 9.5$ [år]
): I 9de året etter 1859, altså i 1868

d) $K(41) = 24 \cdot 3.11^{41} \approx 3.8 \cdot 10^{21}$

Tvilsomt stort tall, forsøk på å begrense bestanden og skadevirkningene, (jakt, gift, ...) samt miljøets bæreevne tilsier at dette tallet er altfor stort og at modellen ikke gjelder så lenge etter 1859.
(Dette gjelder alle populasjonsutviklinger, de vil i praksis flate ut når miljøets bæreevne er nådd. Eksempelvis regner man med at jordens befolkning vil flate ut på ca. 12 til 13 mrd. mennesker.)
Det finnes en matematisk modell som dekker slik utflating:
Den logistiske funksjonen
$$K(t) = \frac{a}{1+be^{-kt}}$$
flater ut på $y = a$. (Horisontal asymptote, der a er bæreevne.)
Lommeregnere og statistikkprogrammer har som regel med en kurvetilpasning (regresjon) for den logistiske funksjonen. Legg inn et tredje punkt:
4 millioner kaniner etter 11 år og prøv en slik kurvetilpasning!)