Heldagsprøve R2 - Våren 2017 - 03.05.17

Løsningsskisser (versjon 11.05.17)

Del 1 - Uten hjelpemidler - 3 timer

Oppgave 1

Deriver funksjonene:

a) $f(x) = x\ln x$ b) $g(x) = 2\sin(\ln x)$ c) $h(x) = \frac{x}{\cos x}$

a) Produktregel: $f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$

b) Kjerneregel: $g(x) = 2\sin(u), \quad u = \ln x$
$g'(x) = 2\cos(u)\frac{1}{x} = \frac{2}{x}\cos(\ln x)$

c) Brøkregel: $h'(x) = \frac{1\cos x - x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$

Oppgave 2

Regn ut integralene:

a) $\int(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x})dx$ b) $\int x\sin x\,dx$ c) $\int \frac{x}{x^2-1}dx$

a) $\int(x^2 - x^{\frac{1}{2}} + 2\frac{1}{x})dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\ln x + C = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + 2\ln x + C$

b) Delvis integrasjon:
$\int x\sin x\,dx = -\cos x \cdot x - \int(-\cos x)1dx = -x\cos x + \sin x + C$

c) Kjerneregel: (Kan også gjøres med delbrøksoppspaltning.)

$u = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$
$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + C$

Oppgave 3

a) Vis at den deriverte av $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ blir $g(x) = -\frac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

b) Bestem arealet avgrenset av grafen til $g(x)$ og linjene $x = 1$ og $x = 2$.
(Burde stått: "... linjene $x = 1$ og $x = 2$ og x-aksen.)

c) Bestem volumet av den figuren vi får når vi dreier $f(x)$ 360° om x-aksen fra $x = 1$ til $x = 2$.

a) Kjerneregel: $f(x) = \sqrt{u}$, $\quad u = 1 + \frac{1}{x} = 1 + x^{-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}(0 - x^{-2}) = \frac{-x^{-2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \quad QED$$

b) Areal: $\left|\int_1^2 g(x)dx\right| = |{}_1^2[f(x)]| = \left|{}_1^2\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right]\right| = \left|\sqrt{1+\frac{1}{2}} - \sqrt{1+\frac{1}{1}}\right| =$

$$\left|\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

c) Volum: $\pi\int_1^2 (f(x))^2 dx = \pi\int_1^2 (1 + \frac{1}{x})dx = \pi \; {}_1^2[x + \ln|x|] =$

$$\pi(2 + \ln 2 - (1 + \ln 1)) = \pi(\ln 2 + 1)$$

Oppgave 4

a) Finn konvergensområdet og summen $s(x)$ av rekken
$(x-1) + (x-1)(1-2x) + (x-1)(1-2x)^2 + \ldots$

b) Løs ligningene:

1) $s(x) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ 2) $s(x) = 1$

a) Geometrisk rekke med $a_1 = x - 1$ og kvotient $k = (1 - 2x)$

Konvergens:
$-1 < k < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 2x < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 2x \wedge 1 - 2x < 1 \Leftrightarrow$
$x < 1 \wedge 0 < x \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Dessuten: $a_1 = 0$ når $x = 1$.

): Konvergensområde: $\langle 0, 1]$

b) I konvergensområdet blir summen $s(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{x-1}{1-(1-2x)} = \frac{x-1}{2x}$

1) $s(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

2) $s(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x} = 1 \Leftrightarrow x = -1$ (Utenfor konvergensområdet)
): Ingen løsning.

Oppgave 5

a) Bruk induksjon til å bevise at
$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}$

b) Finn summen av den uendelige rekken
$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots$

a) Vi kaller summen $S(n) = 2 - \frac{2}{n+1}$

$n = 1$:

Sum av ett ledd: $S(1) = a_1 = 1$

Formel: $S(1) = 2 - \frac{2}{1+1} = 1$

OK

Induksjonstrinn: $n \to n+1$:

Må vise at $S(n+1) = 2 - \frac{2}{n+2}$ hvis vi antar at $S(n) = 2 - \frac{2}{n+1}$ gjelder for en n.

$$S(n+1) = S(n) + a_{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2 - \left(\frac{2(n+2)-2}{(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$2 - \frac{2n+4-2}{(n+1)(n+2)} = 2 - \frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 2 - \frac{2}{n+2}$$

OK

b) $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots = \lim_{n\to\infty}(2 - \frac{2}{n+1}) = 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 2 - 0 = 2$

Oppgave 6

En kuleflate α har ligningen $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 44 = 0$

a) Finn sentrum S og radius R til kuleflaten α.

b) Vis at kuleflaten går gjennom punktet $P = (3, -1, 4)$

c) Planet β har ligningen $x + y + z + 4 = 0$. Finn sentrum T og radius r i skjæringssirkelen mellom planet β og kuleflaten α.

d) Finn skjæringspunktene mellom en linje gjennom S og T og kuleflaten α.

a) α: $x^2 + y^2 - 2y + 1^2 + z^2 + 4z + 2^2 = 44 + 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 7^2$

): Sentrum: $S = (0, 1, -2)$ Radius: $R = 7$

b) $\overrightarrow{SP} = [3, -2, -6] \Rightarrow \left|\overrightarrow{SP}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7 = R$

Viser at P har avstand lik radien fra sentrum. P må derfor ligge på kuleflaten.
(Kan også sjekke om koordinatene 3, -2 og -6 passer i ligningen for kuleflaten.)

c) Avstand fra β til S: $d = \left|\frac{x_S + y_S + z_S + 4}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{0+1-2+4}{\sqrt{3}}\right| = \sqrt{3}$

En dertil egnet figur vil vise at Pythagoras gir:

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{7^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{46}$

Normalvektor β: $\vec{n} = [1, 1, 1]$

$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} \pm d\vec{e} = \overrightarrow{OS} \pm d\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = [0, 1, -2] \pm \sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1] =$

$$[0,1,-2] \pm [1,1,1]$$
$$\overrightarrow{OT} = [1,2,-1] \vee \overrightarrow{OT} = [-1,0,-3]$$
): $T = (-1,0,-3)$ (da $(1,2,-1)$ ikke ligger i planet β.)

d) Skjæringspunktene på normal gjennom planet β og S, i avstand R fra S:
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} \pm R\,\vec{e} = \overrightarrow{OS} \pm R\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = [0,1,-2] \pm 7\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]$$
$$\overrightarrow{OQ} = [\tfrac{7}{\sqrt{3}}, 1+\tfrac{7}{\sqrt{3}}, -2+\tfrac{7}{\sqrt{3}}] \vee \overrightarrow{OQ} = [-\tfrac{7}{\sqrt{3}}, 1-\tfrac{7}{\sqrt{3}}, -2-\tfrac{7}{\sqrt{3}}]$$

): $Q_1 = (\frac{7}{\sqrt{3}}, 1+\frac{7}{\sqrt{3}}, -2+\frac{7}{\sqrt{3}})$
$Q2 = (-\frac{7}{\sqrt{3}}, 1-\frac{7}{\sqrt{3}}, -2-\frac{7}{\sqrt{3}})$

Oppgave 7

Løs ligningen $\sqrt{3}\,\sin^2 x + \sin x \cos x - \sin x = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

$$\sin x(\sqrt{3}\,\sin x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sqrt{3}\,\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi$$

$$\sqrt{3}\,\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin(x + \tfrac{\pi}{6}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{1}{2}$$
$$\sin(x + \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x + \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\pi}{6} + m\,2\pi \vee x + \tfrac{\pi}{6} = \pi - \tfrac{\pi}{6} + n\,2\pi \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \vee x = \tfrac{2\pi}{3}$$

): $L = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$

Oppgave 8

Finn den spesielle løsningen av $y'' + 4y' + 5y = 0$ når $y(0) =$ og $y'(0) = 2$

Karakteristisk ligning: $r^2 + 4r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -2 \pm i$

Generell løsning: $y = e^{-2x}(A\sin x + B\cos x)$

$y(0) = 0$: $0 = e^0(A \cdot 0 + B\cos 0) \Leftrightarrow B = 0$
): $y = e^{-x}A\sin x$

$$y' = -e^{-x}A\sin x + e^{-x}A\cos x = Ae^{-x}(\cos x - \sin x)$$

$y'(0) = 2$: $2 = Ae^0(\cos 0 - \sin 0) \Leftrightarrow A = 2$

Spesiell løsning: $y = 2e^{-2x}\sin x$

Oppgave 9

Gitt differensialligningen $y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{8}{x^2}y = 0.$

a) Vis at $y = Cx^4 + \frac{D}{x^2}$ er en løsning til ligningen. (Du skal ikke løse ligningen her.)

b) Finn en løsning der $y(1) = 2$ og $y'(1) = 4$.

a) $y = Cx^4 + Dx^{-2}$ gir:
$y = 4Cx^3 - 2Dx^{-3}$ og $\quad y'' = 12Cx^2 + 6Dx^{-4}$

$$VS = 12Cx^2 + 6Dx^{-4} - \tfrac{1}{x}(4Cx^3 - 2Dx^{-3}) - \tfrac{8}{x^2}(Cx^4 + Dx^{-2}) =$$
$$12Cx^2 + 6Dx^{-4} - 4Cx^2 + 2Dx^{-4} - 8Cx^2 - 8Dx^{-4} =$$
$$(12C - 4C = 8C - 8C)x^2 + (6D + 2D - 8D)x^{-4} = 0$$

$VS = HS \qquad QED$

b) $y(1) = 2$: $\qquad C + D = 2 \qquad I$

$y' = 4Cx^3 - 2D\frac{1}{x^3}$

$y'(1) = 4$: $\qquad 4 = 4C - 2D \Leftrightarrow 2C - D = 2 \qquad II$

$I + II$ gir: $\qquad 3C = 4 =\Leftrightarrow C = \frac{4}{3}$

Innsatt i II gir: $D = 2C - 2 = 2\frac{4}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

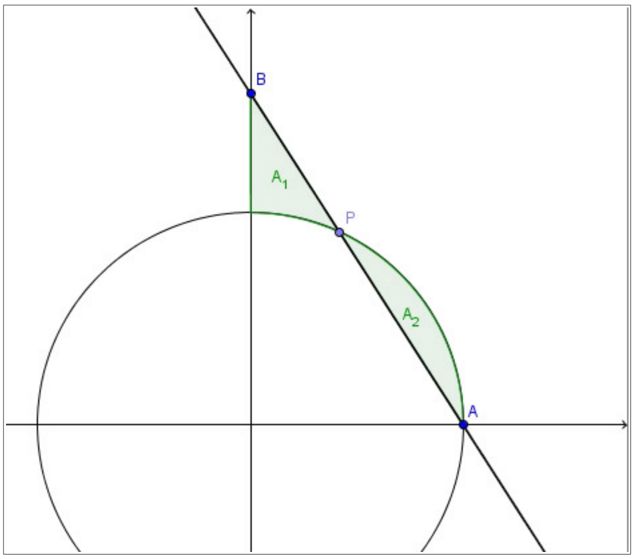
): Spesiell løsning: $\quad y = \frac{2}{3x^2} + \frac{4}{3}x^4$

Del 2 - Med hjelpemidler - 2 timer

Oppgave 10

En sirkel med sentrum i Origo har radius R. Sirkelen skjærer x-aksen i punktet A.
Et punkt P, med x-koordinat p, ligger på sirkellinjen i første kvadrant.
Linjen gjennom A og P skjærer y-aksen i punktet B.

Bruk CAS til å bestemme hvilken verdi av p som gjør de to skraverte arealene A_1 og A_2 i figuren under like store:



CAS:

```
f(x):=sqrt(R^2-x^2)
A:=(R,0)
P:=(p,f(p))
l(x):=Linje[P,A]
A_1:=IntegralMellom[l,f,0,p]
A_2:=IntegralMellom[f,l,p,R]
Løs[A_1=A_2,p]
```

gir: $p = R$ (Falsk løsning, A_1 udefinert når $p = R$ og $A = P$)

og $p = \frac{R\pi^2-4R}{\pi^2+4} = R\frac{\pi^2-4}{\pi^2+4}$

Oppgave 11

Vi har en tallfølge a_n : $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \ldots$

a) Vis at a_n er definert av at telleren er de n første partallene og nevneren er de n neste partallene.

b) Vis at summen av de n første partallene kan skrives $S_n = n(n+1)$

c) Forklar at $a_n = \frac{S_n}{S_{2n}-S_n}$. Regn ut denne brøken.

a) $a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2+4}{6+8} = \frac{3}{7}$, $a_3 = \frac{2+4+6}{8+10+12} = \frac{2}{5}$,
$a_4 = \frac{2+4+6+8}{10+12+14+16} = \frac{5}{13}$ *QED*

b) Kan vises med figurtall (rektangler), men bruker aritmetisk rekke med $a_1 = 2$ og differanse $d = 2$ som gir:

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 2 + 2(n-1) = 2n$$

og

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2 + 2n) = n(n+1) \qquad QED$$

c) $a_n = \frac{2+4+6+...+2n}{(2n+2)+(2n+4)+...+(2n+2n)} = \frac{2+4+6+...+2n}{(2+4+6+...+(2n+2)+(2n+4)+...+4n)-(2+4+6+...+2n)} = \frac{S_n}{S_{2n}-S_n}$ *QED*
(Nevner: Differanse av alle ledd fra 1 til $2n$ minus alle ledd fra 1 til n.)

$$a_n = \frac{S_n}{S_{2n}-S_n} = \frac{n(n+1)}{2n(2n+1)-n(n+1)} = \frac{n(n+1)}{4n^2+2n-n^2-n} = \frac{n(n+1)}{3n^2+n} = \frac{n(n+1)}{n(3n+1)} = \frac{n+1}{3n+1}$$

Oppgave 12

Tid: [år]	1996($t = 0$)	2007($t = 11$)
Bestand: [par]	5	43

Tabellen viser en telling av antall ulvepar i en bestand av ulver i det sentrale Idaho i 1996 ($t = 0$) og 2007 ($t = 11$).
I en modell for antall ulvepar y som funksjon av tiden t (målt i antall år etter 1996) gjelder følgende differensialligning:

$$y' = ky(y-4)(90-y)$$

OBS: Feil i oppgave, skulle vært $y' = k(y-4)(90-y)$
Dette er en variant av den logistiske differensialligningen, hvor vi i tillegg til å ha en øvre grense for bestanden også har en minste grense, som bestanden ikke må komme under hvis den ikke skal dø ut.

a) Vis at $y = \frac{90+4Ce^{-k86t}}{1+Ce^{-k86t}}$ er en generell løsning av differensialligningen.
Finnes det andre løsninger? (Som ikke er dekket av alle mulige valg av C?)

b) Vis at $k = 0.0045$ og $C = -85$ ut fra verdiene i tabellen.

OBS: Feil i oppgave, skulle vært $C = 85$

c) Hva er den øvre grense for antallet ulvepar i det sentrale Idaho?

d) Bruk modellen til å regne ut på hvilket tidspunkt veksthastigheten er størst.
Hva er veksthastigheten på dette tidspunktet?

e) I hvilket år ville bestanden ha dødd ut hvis det var 3 fødedyktige ulvepar i 1996?

a) og b):

1	f(t):=LøsODE[y'=k (y-4) (90-y),y,t] → $f(t) := \frac{4\,c_6\,e^{-86kt} - 90}{c_6\,e^{-86kt} - 1}$
2	f(0)=5 → $\frac{4\,c_6 - 90}{c_6 - 1} = 5$
3	f(11)=43 → $\frac{4\,c_6\,e^{-946k} - 90}{c_6\,e^{-946k} - 1} = 43$
4	{$2, $3} Løs: $\left\{\left\{c_6 = -85, k = -\frac{1}{946} \ln\left(\frac{47}{3315}\right)\right\}\right\}$
5	Numerisk[$4,3] → $\{\{c_6 = -85, k = 0.0045\}\}$

a) Vi ser at løsningen er den samme som i oppgaven, hvis vi setter
$C = -c_6$ og multipliserer både teller og nevner med -1.

Dessuten ser vi at $y = 4$ og $y = 90$ også oppfyller differensialligningen.
$y = 90$ er dekket av $C = 0$, men $y = 4$ er ikke dekket av endelige verdier for C, så $y = 4$ må også være med i den generelle løsningen.

b) På Fil, Innstillinger, Avrundinger bør du sette minst 3 gjeldende siffer for å få svarene
$C = 85$ og $k = 0.0045$.
($c_6 = -85$ i CAS tilsvarer $C = 85$ i oppgaven.)

c)

6	g(t) :=(4 (-85) exp(-86 0.0045 t)-90)/(-85 exp(-86 0.0045 t)-1) → $g(t) := \frac{340\,e^{-\frac{387}{1000}t} + 90}{85\,e^{-\frac{387}{1000}t} + 1}$
7	Grenseverdi[g, t, inf] → 90
8	g''(t)=0 Løs: $\left\{t = \frac{1000}{387} \ln(85)\right\}$
9	Numerisk[$8,3] → $\{t = 11.5\}$
10	g'(11.5) ≈ 8.32

Vi definerer den spesielle løsningen som g(t), der C og k har fått numeriske verdier.
g(t) vil da bli vist i grafdelen. Grenseverdien er bærekraften 90.

d) Størst vekst i vendepunktet, som vi finner i linje 8,9 og 10:
Bestanden øker da med 8.3 ulvepar/år.

e) Regner med samme $k = 0.0045$, da vi ser i a) at bare C avhenger av startverdien

$f(0)$ og definerer ny funksjon $h(t)$.

Bestemmer deretter integrasjonskonstanten med $h(0) = 3$ og lager en ny spesiell løsning $i(x)$:

11	h(t):=(4 C exp(-86 0.0045 t)-90)/(C exp(-86 0.0045 t)-1) → $h(t) := \frac{4\,C\,e^{-\frac{387}{1000}t} - 90}{C\,e^{-\frac{387}{1000}t} - 1}$
12	h(0)=3 NLøs: $\{C = 87\}$
13	i(t):=(4 87 exp(-86 0.0045 t)-90)/(87 exp(-85 0.0045 t)-1) → $i(t) := \frac{348\,e^{-\frac{387}{1000}t} - 90}{87\,e^{-\frac{153}{400}t} - 1}$
14	i(t)=0 NLøs: $\{t = 3.495\}$

Bestanden dør altså ut etter ca. 3.5 år.

Oppgave 13

I en trekantet pyramide $ABCT$ er trekanten ABC grunnflate og T toppunkt.
$A = (-3, -4, 1)$, $B = (-1, -3, 2)$, $C = (0, -3, 3)$ og $T = (-2, -1, -5)$.

a) Finn arealet av grunnflaten.

b) Finn volumet av pyramiden.

c) Finn ligningen for et plan som inneholder grunnflaten.

d) Finn avstanden fra T til grunnflaten ABC på to forskjellige måter.

Går fortest med GGB:

```
A:=(-3-4,1)
B:=(-1,-3,2)
C:=(0,-3,3)
T:=(-2,-1,-5)
ab:=Vektor[A,B]
ac:=Vektor[A,C]
n:=ab × ac                    (alt-shift-8 for vektormultiplikasjon)
A_{ABC}:=|n|/2
at:=Vektor[A,T]
V_{ABCT}:=|(ab × ac)*at|/6
abc:=Plan[A,B,C]
h:=3 V_{ABCT}/A_{ABC}
h_2:=Avstand[T,abc]
```

Tar lengre tid å regne manuelt:

$\overrightarrow{AB} = [2, 1, 1]$, $\quad \overrightarrow{AC} = [3, 1, 2]$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [2, 1, 1] \cdot [3, 1, 2] = 6 + 1 + 2 = 9$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [1, -1, -1]$$

a)

$$A_{ABC} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{|[1,-1,-1]|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $V_{ABCT} = \left| \frac{(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AT}}{6} \right| = \left| \frac{([2,1,1] \times [3,1,2]) \cdot [1,3,-6]}{6} \right| = \left| \frac{[1,-1,-1] \cdot [1,3,-6]}{6} \right| = \frac{2}{3}$

c) Normalvektor: $n = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [1, -1, -1]$

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x + 3, y + 4, z - 1] \cdot [1, -1, -1] = 0 \Leftrightarrow$
$x - y - z = 0$

): Plan gjennom A, B og C: $x - y - z = 0$

d) Avstanden som høyde i pyramide:
$h = \frac{V_{ABCT}}{A_{ABC}} 3 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} 3 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Avstand plan til punkt: $\left| \frac{x_T - y_T - z_T}{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{-2-(-1)-(-5)}{\sqrt{3}} \right| = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

(Som tilsvarer projeksjonen: $\left| \frac{\overrightarrow{AT} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[1,3,-6] \cdot [1,-1,-1]}{\sqrt{3}} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$
