Heldagsprøve R2

Våren 2015

Onsdag 6. Mai 09.00 - 14.00

Løsningsskisser - Versjon 13.05.15

Del 1 - Uten hjelpemidler - 3 timer

Oppgave 1

Deriver funksjonene:
a) $f(x) = \tan(x^3)$

Kjerneregel: $f(x) = \tan(u), \qquad u = x^3$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 u} 3x^2 = \frac{3x^2}{\cos^2(x^3)} \qquad$ (Eventuelt: $f'(x) = 3x^2(\tan^2(x^3) + 1)$)

b) $g(x) = \frac{x}{\ln x}$

Brøkregel: $g'(x) = \frac{1 \ln x - x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

c) $h(x) = x \sin x$

Produktregel: $h'(x) = 1 \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$

Oppgave 2

Regn ut integralene:

a) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Variabelskifte: $u = \ln x, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = xdu$
gir: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u \frac{1}{x} x du = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

(Går også med delvis integrasjon, men mer tungvindt.)

b) $\int (x-1)e^x dx$

Delvis integrasjon: $\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx =$
$(x-1)e^x - e^x + C = (x-2)e^x + C$

c) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx$

Samme grad i teller og nevner, *må* dividere ut først:
$= \int (1 + \frac{2}{x^2-1}) dx$

Delbrøksoppspaltning gir: $\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

Klar for integrasjon:
$\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = \int (1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}) dx = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C =$
$x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ (Eventuelt: $x + \ln\left|C\frac{x-1}{x+1}\right|$)

Oppgave 3

a) Vis at den deriverte av $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ blir $g(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$

Kjerneregel: $f(x) = \cos^{-1}(x) = u^{-1}, \qquad u = \cos x$

$f'(x) = -u^{-2}(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \frac{\tan x}{\cos x} \qquad QED$

b) Bestem arealet avgrenset av x-aksen, grafen til $g(x)$ og linjen $x = \frac{\pi}{4}$.

$g(0) = 0, g(x)$ positiv i intervallet $[0, \frac{\pi}{4}]$ så vi har:

Areal= $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx = f(\frac{\pi}{4}) - f(0) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} - \frac{1}{1} = \sqrt{2} - 1$

Oppgave 4

Ligningen for en kuleflate er gitt ved: $x^2 + y^2 + z^2 - 10y + 6z - 15 = 0$.

a) Bestem sentrum S og radius R i kulen.

Lager fulle kvadrater:
$x^2 + y^2 - 10y + 5^2 + z^2 + 6z + 3^2 - 15 = 5^2 + 3^2 \Leftrightarrow$
$x^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 7^2$

): Sentrum: $S = (0, 5, -3)$, Radius: $R = 7$

b) Finn parameterfremstillingen for en linje l, som går gjennom punktene $P(3, -1, -1)$ og $Q(5, 0, 1)$.

Retningsvektor: $\vec{r_l} = \overrightarrow{PQ} = [2, 1, 2]$

Vektorform: $[x, y, z] = \overrightarrow{OP} + t\vec{r_l} = [3, -1, -1] + t[2, 1, 2]$

Parameterform: $l: \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 2t \end{array} \right\}$

c) Regn ut avstanden fra linjen l til sentrum i kuleflaten S.

$\overrightarrow{PS} = [-3, 6, -2]$

Høyde=Areal/grunnlinje gir:

$a_{lS} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \vec{r_l}|}{|\vec{r_l}|} = \frac{\sqrt{\overrightarrow{PS}^2 \vec{r_l}^2 - (\overrightarrow{PS} \cdot \vec{r_l})^2}}{|\vec{r_l}|} = \frac{\sqrt{49 \cdot 9 - (-4)^2}}{3} = \frac{\sqrt{425}}{3} = \frac{5\sqrt{17}}{3}$

d) Vis at ligningen for et av planene som har avstanden $d = 6$ fra S og står normalt på l blir:

$2x + y + 2z - 17 = 0$

Normalvektor for planene: $\vec{n} = \vec{r_l} = [2, 1, 2]$

Planet har derfor ligningen $2x + y + 2z + d = 0$

Avstandsformel gir:

$\frac{|2x_S + y_S + 2z_S + d|}{3} = 6 \Leftrightarrow |2 \cdot 0 + 5 + 2(-3) + d| = 18 \Leftrightarrow$

$|d - 1| = 18 \Leftrightarrow d - 1 = -18 \vee d - 1 = 18 \Leftrightarrow$

$d = -17$ (Vårt plan) $\vee$ $d = 19$ (Det andre planet på andre siden av S.)

): Planet har ligningen $2x + y + 2z - 17 = 0$

e) Planet i d) skjærer kulen. Skjæringskurven mellom planet og kulen er en sirkel.
Finn sentrum og radius i denne sirkelen.

Figur og Pythagoras gir radius: $r = \sqrt{R^2 - 6^2} = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{13}$

Sentrum T gitt av:

$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + 6\vec{e} = \overrightarrow{OS} + 6\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = [0, 5, -3] + 6\frac{1}{3}[2, 1, 2] = [4, 7, 1] \Leftrightarrow$

$T = (4, 7, 1)$

Oppgave 5

Vi har gitt rekken $e^x + e^{2x} + e^{3x} + \ldots$

a) Vis at rekken er geometrisk og finn rekkens konvergensområde.

Kvotient: $k = \frac{e^{2x}}{e^x} = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} = \ldots = e^x$

Konvergensområde: $-1 < e^x < 1$

Venstre ulikhet alltid oppfyllt ($e^x > 0$).

$e^x < 1 \Leftrightarrow \ln e^x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 0$

): Konvergensområde: $x < 0$

b) Finn summen av rekken, når denne eksisterer.

$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{e^x}{1-e^x}$

Vi ønsker at summen av rekken skal konvergere mot tallet a.
c) Finn alle mulige verdier av a.

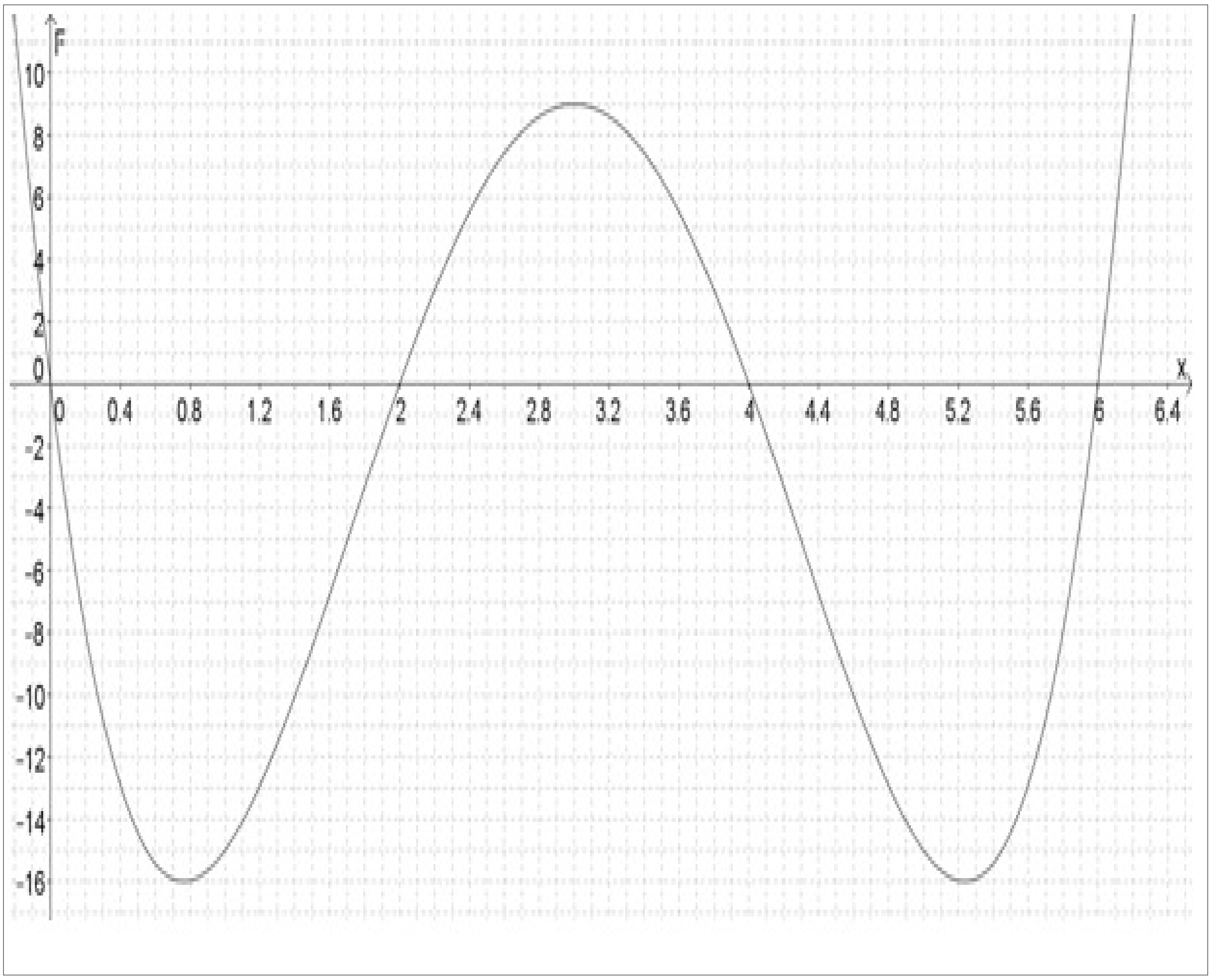
$a = \frac{e^x}{1-e^x}$

Hvis $0 < e^x < 1$ vil a alltid være positiv, hvis teller nær 1 blir nevner nær 0 og omvendt, så vi har:

$a \in \langle 0, \rightarrow \rangle$

Oppgave 6

Grafen viser funksjonen $F(x)$ der $F'(x) = f(x)$.



a) Bestem nullpunktene til $f(x)$ og tegn fortegnslinje for $f(x)$ for $x \in [0,6]$.

$f(x) = F'(x)$ har nullpunkter der $F(x)$ har ekstremalpunkter, avlest:

$x \in \{0.75, 3.0, 5.25\}$

	0.75	3.0	5.25	
$f(x)$:	- - - - - -o————	o- - - - - - - -	o————	

b) Bestem $\int_2^3 f(x)dx$ og $\int_2^4 f(x)dx$.

$$\int_2^3 f(x)dx = F(3) - F(2) = 9 - 0 = 9$$

$$\int_2^4 f(x)dx = F(4) - F(0) = 0 - 0 = 0$$

c) Bestem arealet avgrenset av x-aksen, $f(x)$ og linjene $x = 2$ og $x = 6$.

Da $f(x)$ krysser x-aksen flere ganger i dette intervallet må vi dele opp og korrigere fortegn for arealer under x-aksen:

$$\text{Areal}= \int_2^3 f(x)dx + \left|\int_3^{5.25} f(x)dx\right| + \int_{5.25}^6 f(x)dx =$$
$$(9-0) + |-16-9| + (0-(-16)) = 9 + 25 + 16 = 50$$

Ikke prøv å gjøre denne oppgaven uten å tegne en figur som tydelig viser hvordan $f(x)$ omtrent må se ut!

Oppgave 7

a) Løs differensialligningen

$$y' - \frac{y}{x} = 2, \qquad \text{når } y(1) = 5$$

Kan lage brøk direkte: $\frac{xy'-y}{x^2} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{2}{x} \Leftrightarrow$
$\frac{y}{x} = 2\ln|x| + C \Leftrightarrow y = 2x\ln|x| + Cx$ (Generell løsning)

Ellers må vi bruke integrerende faktor: $IF = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$
Dette gir: $(y\frac{1}{x})' = \frac{2}{x}$, samme ligning som vi løste over!

Initialbetingelse $y(1) = 5$ gir: $5 = 2 \cdot 1 \cdot \ln|1| + C \cdot 1 \Leftrightarrow C = 5$

): $y = 2x\ln|x| + 5x = x(2\ln|x| + 5)$ (Spesiell løsning)

b) Bestem likningen til tangenten i punktet $(1, 5)$.

Bruker differensialligning for å slippe å derivere:
Stigningstall: $y'(1) = 2 + 5/1 = 7$

Ett-punkts-formelen: $y - 5 = 7(x-1) \Leftrightarrow y = 7x - 2$

Oppgave 8

Løs ligningene:
a) $\tan(2x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$

$L = \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\}$

b) $2\sin x \cos x + \sin x = 0, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

$\sin x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$
$x = 0 + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = 2\pi - (\frac{2\pi}{3}) + k2\pi$
$x = 0 + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi$

$L = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\}$

Oppgave 9

a) Faktoriser $2n^2 + 3n + 1$.

abc-formel på $2n^2 + 3n + 1 = 0$ gir: $n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow$
$n = -1 \vee n = -\frac{1}{2}$

): $\quad 2n^2 + 3n + 1 = 2(n+1)(n + \frac{1}{2}) = (n+1)(2n+1)$

b) Vis ved induksjon at for alle $n \in \mathbb{N}$ er
$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{2n}{2n+1} = S_n$

$n = 1$:
$VS = a_1 = \frac{2}{3}$
$HS = S_1 = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{3} \qquad OK$

Induksjonstrinn: $n \to n + 1$:

Må vise at summen av $n + 1$ ledd blir: $S_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{2n+2}{2n+3}$

$n + 1$ ledd: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} =$
$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \frac{2}{(2(n+1)-1) \cdot (2(n+1)+1)} =$
$\frac{2n}{2n+1} + \frac{2}{(2(n+1)-1) \cdot (2(n+1)+1)} = \frac{2n}{2n+1} + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} =$
$\frac{2n(2n+3)+2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{4n^2+6n+2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2(n^2+6n+2)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} =$
$\frac{2(n+1)}{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} \qquad OK$

Del 2 - Med hjelpemidler - 2 timer

Oppgave 10

Tabellen viser en oversikt over gjennomsnittstemperaturen T i Kautokeino i måned nr. x.

x [mnd]:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T(x)$ [°]:	-15.9	-14.2	-10.6	-4.1	2.9	9.7	12.4	10.2	4.8	1.9	-9.2	-14.0

a) Finn digitalt den funksjonen av typen $A\sin(bx + c) + d$ som passer best.

GeoGebra:
Legger tabell i regneark, lager liste med punkt; Liste1.
T(x):=RegSin[Liste1] gir da

$$T(x) = -1.99 + 14.0\sin(0.531x - 2.26)$$

b) Hva er gjennomsnittstemperaturen i året?

Likevektslinje: $\bar{T} = -1.99°\text{C} \approx -2°\text{C}$

c) Når øker temperaturen mest?

Øker mest i vendepunktene:
I CAS:
$T''(x) = 0$ Løs-knapp gir:
{x = ((1.88 * k_1) * 3.14) + 4.25}
Numerisk[$2,3] gir da: $x = 4.25 + 5.9k$

(Manuelt: $0.531x - 2.26 = 0 + k\pi \Leftrightarrow x = 4.26 + k5.93$)

): Temperaturen øker mest i siste del av april.

Oppgave 11

Strikkhopping er en aktivitet der en person hopper ut fra for eksempel en høy bro.
Personen er feste til den ene enden av en elastisk strikk. Den andre enden av strikken er festet til stedet en hopper fra.
Vi antar at kraften, F, som virker på hopperen når strikken blir forlenget med y i forhold til den lengden strikken har når den ikke er belastet, er:
$F = ky$
der k er en konstant som avhenger av materialet i strikken.

a) Når en hopper med massen $m = 80$ kg til slutt henger i ro i strikken, i likevektspunktet, er strikken forlenget med 7.1 meter. Regn ut verdien til fjærkonstanten k.

Newton II: $mg = k7.1 \Leftrightarrow k = \frac{80 \cdot 9.8}{7.1} \approx 110$ [N/m]

b) Vi regner med at luftmotstanden gir en dempningsfaktor på $d = 73$ Ns/m.
Utled ved hjelp av Newtons andre lov at svingebevegelsen til hopperen i siste del av strikkhoppet kan beskrives av differensialligningen
$80y'' + 73y' + 110y = 0$
der y er utslaget, målt nedover fra likevektslinjen. (Der hopperen til slutt vil henge i ro.)
Vi bruker tyngdeakselerasjonen $g = 9.8$ m/s^2.

Newton II: $\sum F = ma$ *Tegn figur i slike oppgaver!*
$(mg - dy' - k(y + 7.1) = my''$
$my'' + dy' + ky = mg - 7.1k$
Her er høyre siden 0, se oppgave a) så vi får:
$my'' + dy' + ky = 0$ eller $80y'' + 73y' + 110y = 0$

c) Finn den spesielle løsningen av differensialligningen når $t = 0$ sekunder idet strikken strammer seg (har tatt opp all slakk) og hopperens fart er 41 m/s nedover.

Karakteristisk ligning: $80r^2 + 73r + 110 = 0 \iff r = -0.456 \pm 1.08i$

Generell løsning: $y = e^{-0.456t}(C\sin(1.08t) + D\cos(1.08t))$

Mye arbeid med derivasjon og initialbetingelser, så best å ta det med CAS:

1	LøsODE[80 y''+73y'+110y=0]
	→ $y = c_7 \cos\left(3\,x\,\frac{\sqrt{3319}}{160}\right) e^{-73\cdot\frac{x}{160}} + c_8\, e^{-73\cdot\frac{x}{160}} \sin\left(3\,x\,\frac{\sqrt{3319}}{160}\right)$
2	f(x):=Numerisk[$1,3]
	→ $f(x) := c_7\, e^{-0.456x} \cos(1.08\,x) + c_8\, e^{-0.456x} \sin(1.08\,x)$
3	f(0)=-7.1
	→ $c_7 = -\frac{71}{10}$
4	f'(0)=41
	→ $-\frac{57}{125}\,c_7 + \frac{27}{25}\,c_8 = 41$
5	{$3, $4}
	Løs: $\left\{\left\{c_7 = -\frac{71}{10}, c_8 = \frac{47203}{1350}\right\}\right\}$
6	Numerisk[$5,3]
	→ $\{\{c_7 = -7.1, c_8 = 35\}\}$

):

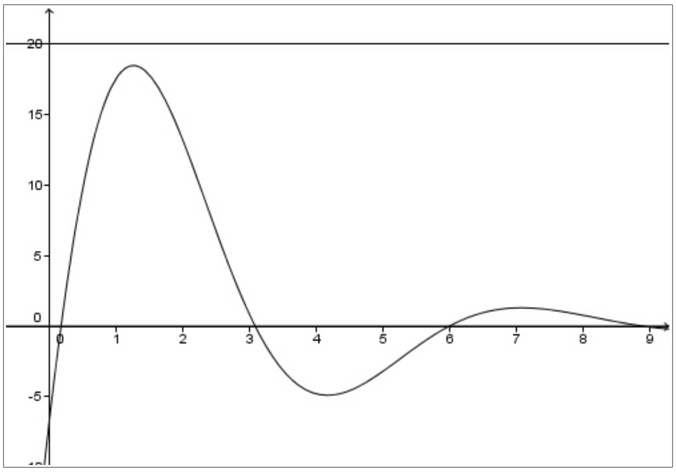
Spesiell løsning: $y = e^{-0.456t}(35\sin(1.08t) - 7.1\cos(1.08t))$

d) Bakkenivået er 20 meter under likevektslinjen. Går dette bra?

I GeoGebra, grafdel:

$g(x) = e^{-0.456x}(35\sin(1.08x) - 7.1\cos(1.08x))$

$y = 20$



): Vi ser av grafen at det største utslaget er mindre enn 20 meter, men kommandoen **Ekstremalpunkt[f,1,2]** gir oss (1.27,18.4).

Så, hvis personen er mindre ennn 1.60 meter høy går det bra!

e) Hva er svingetiden i den dempede svingebevegelsen?

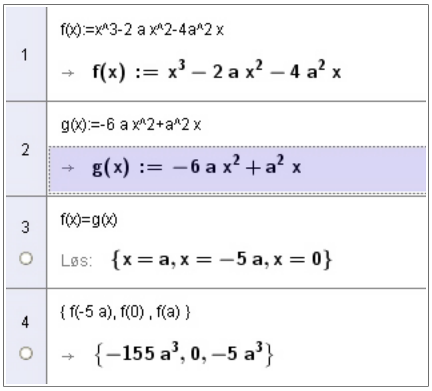
Svingetid: $\frac{2\pi}{T} = 1.08 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1.08} \approx 5.82$ [s]

Oppgave 12

Oppgaven skal løses med CAS:
Gitt funksjonene

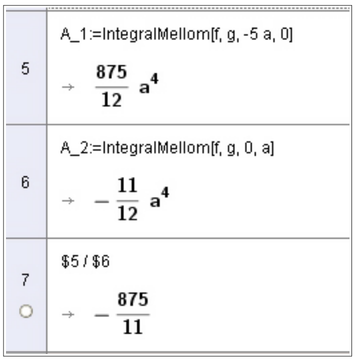
$f(x) = x^3 - 2ax^2 - 4a^2x \qquad \text{og} \qquad g(x) = -6ax^2 + a^2x, \qquad a > 0$

a) Bestem skjæringspunktene mellom $f(x)$ og $g(x)$.



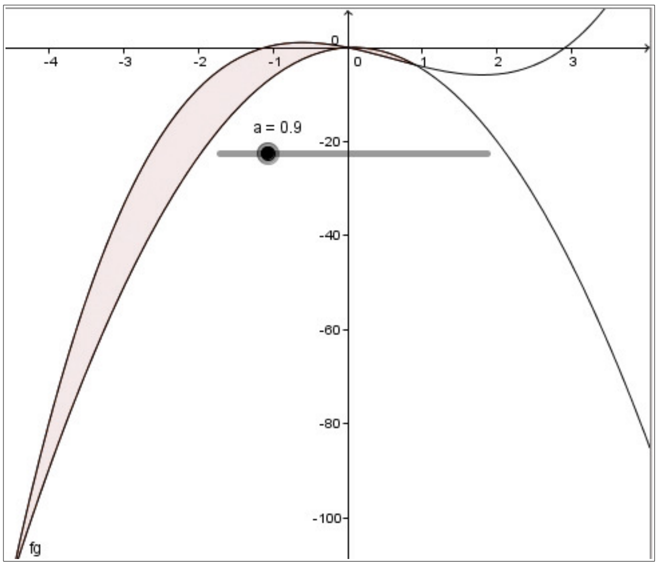
): Skjæringspunkter: $\quad (-5a, -155a^3), (0,0), (a, -5a^3)$
Grafene avgrenser to områder med arealene A_1 og A_2.

b) Vis at forholdet mellom A_1 og A_2 er uavhengig av a.



Vi ser at forholdet mellom arealene ikke inneholder a, *QED*.

(Kan være lurt å først grafe $f(x)$ og $g(x)$ i grafdelen av GeoGebra med en skyver/glider a, for å visualisere situasjonen før man bruker CAS.
Obs: Når man gjør oppgaven i CAS, bør man starte en ny fil, slik at ikke det man gjorde i grafdelen først forstyrrer det man gjør etterpå i CAS!

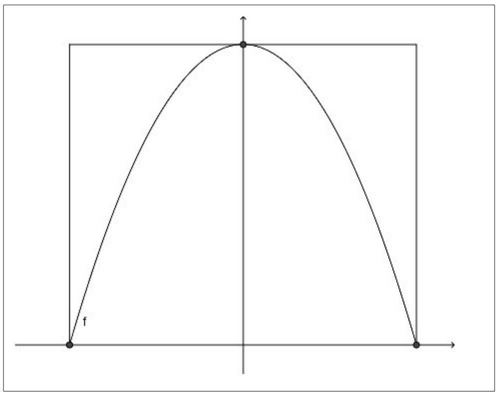


)

Oppgave 13

Oppgaven skal løses med CAS:
La f være funksjonen gitt ved $f(x) = -ax^2 + b, \qquad a > 0, \qquad b > 0$

Den delen av grafen til f som er over x-aksen er innskrevet i et rektangel som vist på figuren:



a) Bestem skjæringspunktene mellom grafen til f og koordinataksene.

b) Vis at arealet under grafen til f er $\frac{2}{3}$ av arealet av rektangelet.

Skjæringspunkter med x-aksen: A og B med x-koordinater x_A og x_B:

1	f(x):=b-a x^2 → $f(x) := -a\,x^2 + b$
2	f(x)=0 Løs: $\left\{x = -\frac{\sqrt{a\,b}}{a}, x = \frac{\sqrt{a\,b}}{a}\right\}$
3	x_A:=-sqrt(a b)/a → $-\frac{\sqrt{a\,b}}{a}$
4	x_B:=sqrt(a b)/a → $\frac{\sqrt{a\,b}}{a}$

5	Areal_{graf}:=Integral[f,x_A,x_B] → $4\,b\,\frac{\sqrt{a\,b}}{3\,a}$
6	Areal_{rektangel}:=(x_B-x_A) b → $2\,b\,\frac{\sqrt{a\,b}}{a}$
7	Forhold_a:=Areal_{graf}/Areal_{rektangel} → $\frac{2}{3}$

Vi roterer grafen til f 360° om x-aksen.

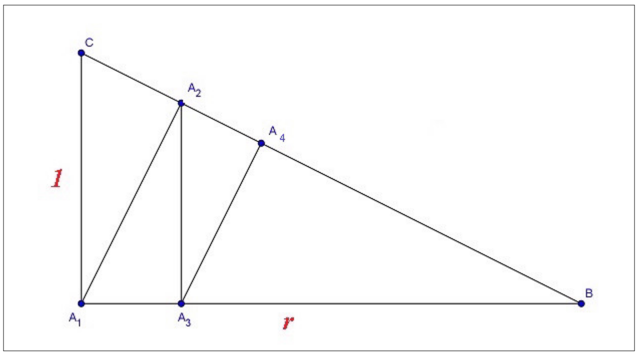
c) Undersøk om volumet av rotasjonslegemet er $\frac{2}{3}$ av det omdreiningslegemet vi får når vi roterer rektanglet 360° om x-aksen.

8	V_{rot}:=pi Integral[(f(x))^2,x_A,x_B] → $16 \cdot \frac{1}{15}\,b^2\,\pi\,\frac{\sqrt{a\,b}}{a}$
9	V_{rektangel}:=pi b^2 (x_B-x_A) → $2\,b^2\,\pi\,\frac{\sqrt{a\,b}}{a}$
10	Forhold_c:=V_{rot}/V_{rektangel} → $\frac{8}{15}$

): Forholdet mellom volumene er altså ikke $\frac{2}{3}$.

Oppgave 14

En rekke er definert ved at $a_1 = CA_1$, $a_2 = A_1A_2$, $a_3 = A_2A_3$ osv. slik denne figuren viser: Alle trekantene i figuren er rettvinklede og AC har lengden 1 og AB har lengden r.



a) Vis at kvotienten i rekken er $k = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}$.

Trekantene $A_2A_1C \backsim A_1BC$. (En felles vinkel, begge rettvinklede.)

Dette gir forholdet: $\frac{A_1A_2}{A_1C} = \frac{A_1B}{BC} \Leftrightarrow \frac{A_1A_2}{A_1C} = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}$

Som også er kvotienten i rekken da alle trekantene er formlike:

$$k = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} = \frac{A_1A_2}{A_1C} = \frac{A_2A_3}{A_1A_2} = \frac{A_3A_4}{A_2A_3} = \ldots$$

eller

$$k = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots$$

b) Forklar hvorfor denne rekken konvergerer.

Nevneren $\sqrt{r^2+1}$ er alltid større enn telleren, så $\frac{r}{\sqrt{r^2+1}} < 1$

Samtidig er $\frac{r}{\sqrt{r^2+1}}$ positiv, så vi har $0 < \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} < 1$ som mer enn oppfyller $-1 < k < 1$.

c) Finn summen av rekken uttrykt ved r.

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\frac{r}{\sqrt{r^2+1}}} = \frac{\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}-r}$$

d) Hva må r være for at summen av rekken skal bli 10 ?

$$\frac{\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}-r} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{r^2+1} = 10\sqrt{r^2+1} - 10r \Leftrightarrow$$

$$9\sqrt{r^2+1} = 10r$$

$$\Rightarrow$$

$81(r^2+1) = 100r^2 \Leftrightarrow 19r^2 = 81 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{\frac{81}{19}}$ (Negativ lengde forkastes.)

): $r = \frac{9}{\sqrt{19}}$ (eller $\frac{9\sqrt{19}}{19}$)