Oppgaver - 5.3 Bestemte integraler

527, 531, 535, 539, 542, 544

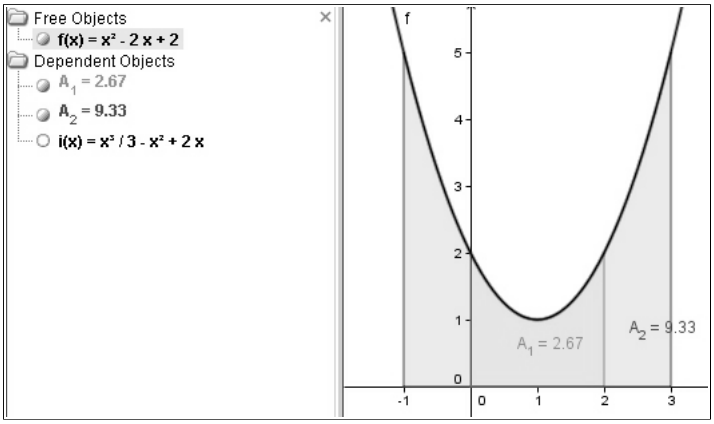
Se formler for ubestemte integraler side 224.

527

$f(x) = x^2 - 2x + 2, \qquad D_f = \mathbb{R}$

a) **GeoGebra:**

f(x)=x^2-2x+2
i(x)=Integral[f]   (Obs: GeoGebra legger ikke til integrasjonskonstanten C)
A_1=Integral[f,0,2]
A_2=Integral[f,-1,3]



b)

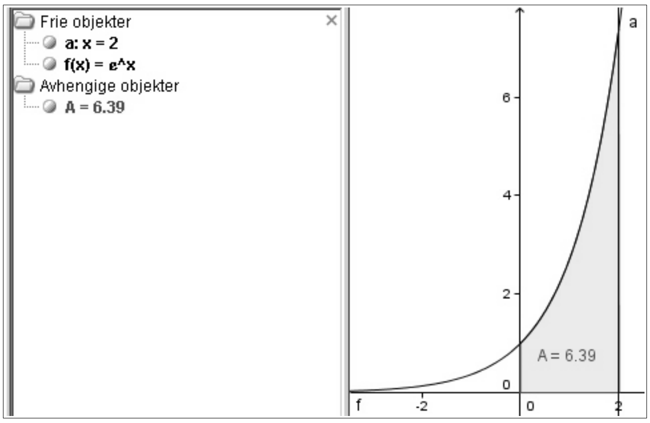
$\int f(x)dx = \int (x^2 - 2x + 2)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + C$

$A_1 = \int_0^2 f(x)dx = [\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x]_0^2 = \frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 \cdot 2 - (0 - 0 + 0) = \frac{8}{3} \approx 2.67$

$A_2 = \int_{-1}^3 f(x)dx = [\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x]_{-1}^3 = \frac{3^3}{3} - 3^2 + 2 \cdot 3 - (\frac{-1}{3} - (-1)^2 + 2(-1)) = \frac{28}{3} \approx 9.33$

531

GeoGebra:
f(x)=exp(x) eller e^x
x=2
A=Integral[f,0,2]



Regning:

$A = \int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1 \approx 6.39$

535

$\int_{-1}^{0} f(x)dx = -A_1 = -4.5 \qquad \int_0^3 f(x)dx = A_2 = 12$

$\int_{-1}^{3} f(x) = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx = -A_1 + A_2 = A_2 - A_1 = 12 - 4.5 = 7.5$

Husk: Integraler har fortegn, arealer har ikke fortegn.
Hvis vi skal regne ut samlet areal, må vi dele opp slik:

$$A_1 + A_2 = \left|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right| + \int_0^3 f(x)dx = |-4.5| + 12 = 16.5$$

539

$f(x) = \cos x \qquad \int f(x)dx = \sin x$

$g(x) = \sin 2x \qquad \int g(x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ (Se formler på side 224.)

Vi trenger integrasjonsgrensene, og må derfor finne skjæringspunktene mellom $f(x)$ og $g(x)$:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$
$2\cos x(\sin x - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$ (I aktuelt intervall.)

$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) - \sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$
$-\frac{1}{2}\cos(\pi) - \sin\frac{\pi}{2} - (-\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin\frac{\pi}{6}) =$
$-\frac{1}{2}(-1) - 1 - (-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

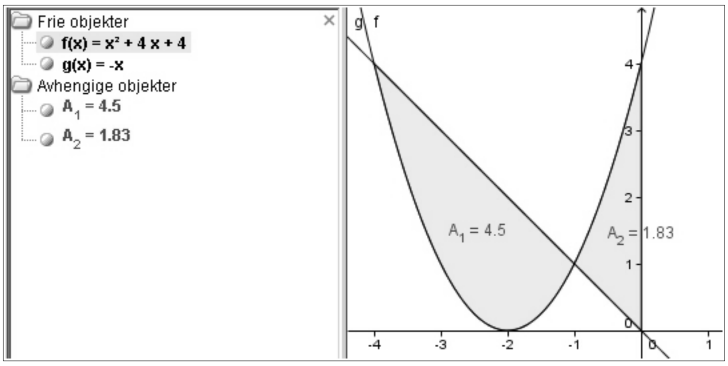
Ekstra:

Det er også et intervall til, mellom $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{5\pi}{6}$, som er avgrenset mellom $f(x)$ og $g(x)$.
Ved symmetri ser vi at dette arealet må være likt det arealet vi allerede har regnet ut!
Selv om det ligger under x-aksen, trenger vi ikke bruke tallverdi, da de negative fortegnene
på arealene mellom $f(x)$ og x-aksen og $g(x)$ og x-aksen går opp i opp, så vi kan regne på samme måte: (øverste funksjon først)

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} g(x)dx = \left[\sin x + \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} =$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{2}(-1)) = \frac{1}{4}$

542

GeoGebra:
f(x)=x^2+4x+4
g(x)=-x
Istedenfor:
    I_f=Integral[f,-4,-1]
    I_g=Integral[g,-4,-1]
    A_1=I_g-I_f
gjør vi:
    A_1=Integral[g,f,-4,-1]
og:
    A_2=Integral[g,f,-1,0]



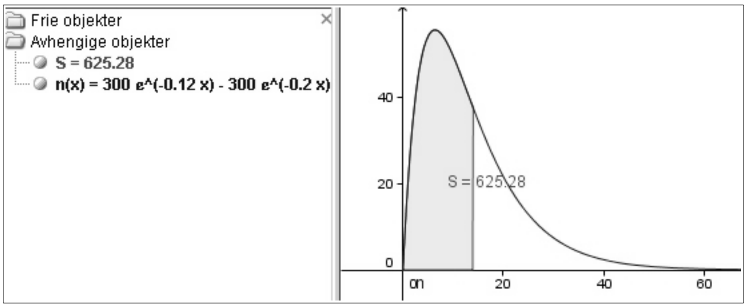
a)
$I_f = \int_{-4}^{-1} f(x)dx = [\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x]_{-4}^{-1} =$
$\frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)^2 + 4(-1) - (\frac{(-4)^3}{3} + 2(-4)^2 + 4(-4)) =$
$-\frac{1}{3} + 2 - 4 - (-\frac{64}{3} + 32 - 16) = 3$

b)
$I_g = \int_{-4}^{-1} g(x)dx = [-\frac{x^2}{2}]_{-4}^{-1} = -\frac{(-1)^2}{2} - (-\frac{(-4)^2}{2}) = -\frac{1}{2} + 8 = \frac{15}{2}$
$A_1 = I_g - I_f = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2} = 4.5$

c)
Tilsvarende: $A_2 = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))dx = [\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} =$
$0 - (-\frac{1}{3} + 2 - 4 + \frac{1}{2}) = \frac{11}{6} \approx 1.83$

544

$n(t) = 300e^{-0.12t} - 300e^{-0.2t}$ [sm/døgn], $\quad t \in [0, 90\rangle$
GeoGebra:
n(x)=Funksjon[300exp(-0.12x)-300exp(-0.2x),0,90]
S=Integral[n,0,14]



$S = \int_0^{14} n(x)dt = 300\int_0^{14}(e^{-0.12t} - e^{-0.2t})dt = 300[\frac{e^{-0.12t}}{-0.12} - \frac{e^{-0.2t}}{-0.2}]_0^{14} =$
$300(\frac{e^{-0.12\cdot14}}{-0.12} - \frac{e^{-0.2\cdot14}}{-0.2} - (\frac{e^0}{-0.12} - \frac{e^0}{-0.2})) \quad = \ldots \approx 626$