Løsningsskisser: R2 - Integralregning

Versjon: 05.09.2016 (La inn litt flere kommentarer.)

Alle oppgaver skal gjøres ved regning unntatt der det eksplisitt står at man skal bruke CAS.

Oppgave 1

Regn ut integralene:

a) $\int 4x^6 dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x}}{2} dx$ c) $\int 2^x dx$

d) $\int e^{-x} dx$ e) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$ g) $\int \frac{x^2-1}{x} dx$

Få frem reglene som brukes i mellomregninger:

a) $\int 4x^6 dx = 4\int x^6 dx = 4\frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{4}{7}x^7 + C$

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{2} dx = \frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(\sqrt{x})^3 + C$
(eller: $\frac{1}{3}x\sqrt{x} + C$)

c) $\int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + C$

d) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ gir med $a = -1$:

$\int e^{-x} dx = \frac{1}{-1}e^{-x} + C = -e^{-x} + C$

e) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ gir med $a = 2$:

$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = \int (2x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$

$\sqrt{2x+1} + C$

f) $\int \frac{x^2-1}{x} dx = \int (\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x})dx = \int (x - \frac{1}{x})dx = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + C$

Oppgave 2

Regn ut de bestemte integralene:

a) $\int_{-1}^{2} (x^2 - x)dx$ b) $\int_{0}^{\ln 2} e^{\frac{x}{5}} dx$

c) Skriv opp kommandoen du ville brukt i GeoGebra CAS for å løse oppgave 2 b).

a) $\int_{-1}^{2} (x^2 - x)dx = {}_{-1}^{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - (\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

b) $\int_0^{\ln 2} e^{\frac{x}{5}} dx = {}_0^{\ln 2}\left[\frac{1}{\frac{1}{5}} e^{\frac{x}{5}}\right] = {}_0^{\ln 2}\left[5e^{\frac{x}{5}}\right] = 5e^{\ln 2 \cdot \frac{1}{5}} - 5e^0 = 5(e^{\ln 2})^{\frac{1}{5}} - 5 =$

$5 \cdot 2^{\frac{1}{5}} - 5 = 5(\sqrt[5]{2} - 1) \approx 0.743$

c) **Integral[exp(x/5),0,ln(2)]** eller **Integral[*e*^(x/5),0,ln(2)]**
(Husk Alt-e for å få Eulers tall *e* og ikke en vanlig e!)

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

a) Regn ut arealet avgrenset av $f(x)$ og x-aksen.

b) Bestem k slik at $\int_2^k f(x)dx = 0$

c) Skriv opp kommandoen(e) du ville brukt i GeoGebra CAS for å løse oppgave 3 b).

Tegn alltid figur når du skal finne arealer med integrasjon, slik at du ser hvilke grenser som må brukes i integrasjonen og hva man må passe på når det gjelder fortegn:

a) Skjæring x-akse: $2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

$$\text{Areal} = \left|\int_{-1}^{3} f(x)dx\right| = \left|\int_{-1}^{3}(2x^2 - 4x - 6)dx\right| = \left|{}_{-1}^{3}\left[\tfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right]\right| =$$

$$\left|\tfrac{2}{3}3^3 - 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - \left(\tfrac{2}{3}(-1) - 2 - 6(-1)\right)\right| = \left|-\tfrac{64}{3}\right| = \tfrac{64}{3} \approx 21.3$$

(Integralet er negativt, arealet skal være positivt.)

b) $\int_2^k (2x^2 - 4x - 6)dx = 2\int_2^k (x^2 - 2x - 3)dx = 2\ {}_2^k\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right] =$

$2\left(\frac{k^3}{3} - k^2 - 3k - \left(\frac{8}{3} - 4 - 6\right)\right) = \frac{2}{3}k^3 - 2k^2 - 6k + \frac{44}{3}$

Vi får ligningen:

$\frac{2}{3}k^3 - 2k^2 - 6k + \frac{44}{3} = 0 \Leftrightarrow 2k^3 - 6k^2 - 18k + 44 = 0$

$k = 2$ er åpenbart en løsning, så polynomdivisjon gir

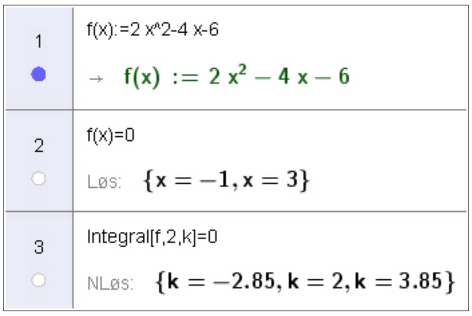
$(k - 2)(2k^2 - 2k - 22) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2 \vee x = \frac{1}{2}(1 - 3\sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{5})$

$x = 2 \vee x \approx -2.85 \vee x \approx 3.85$

(Kan bruke GeoGebra til å finne dette, se c).)

c)



(Linje 2 er bare for å finne integrasjonsgrensene i a) for å se hvordan grafen ligger.)

Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x) = x^2 \ln x$

a) Vis at $f'(x) = x(2\ln x + 1)$

b) Regn ut $\int_1^e x(2\ln x + 1)dx$

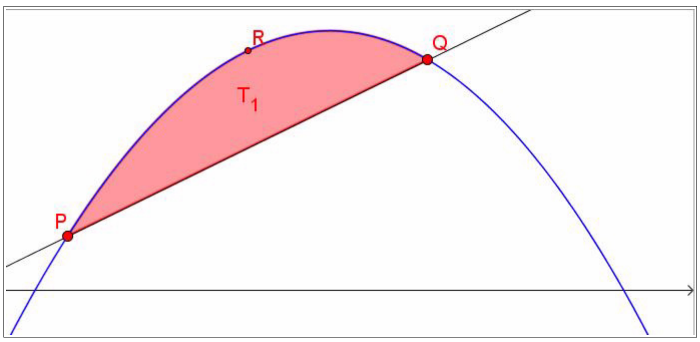
c) Skriv opp kommandoen(e) du ville brukt i GeoGebra CAS for å løse oppgave 4 b).

a) Produktregelen gir:
$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1) \quad QED$

b) Fundamentalteoremet gir:
$\int_1^e x(2\ln x + 1)dx =^e_1 [x^2 \ln x] = e^2 \ln e - \ln 1 = e^2 - 0 = e^2$

c) **Integral[x(2 ln(x)+1),1,*e*]** (Husk Alt-e for Eulers tall *e*!)

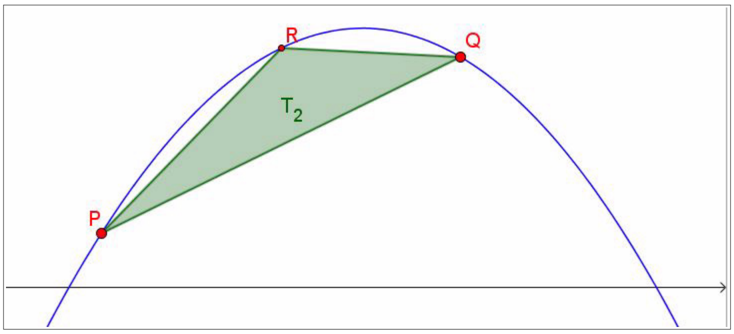
Oppgave 5



Figur 1

Figuren over viser en funksjon $f(x) = ax^2 + bx + c$, der parameterene a, b og c er slik at grafen krummer nedover og alle punktene P, Q og R ligger over x-aksen.
Punktene P, Q og R har x-koordinater på henholdsvis p, q og r, og $r = \frac{p+q}{2}$, slik at R har en x-koordinat midt mellom x-koordinatene til P og Q.

a) Skriv ned hvordan du ville få GeoGebra CAS til å vise at arealet T_1 i figur 1 blir $\frac{a(p-q)^3}{6}$.



Figur 2

b) Skriv ned hvordan du ville få GeoGebra CAS til å regne ut arealet T_2 i figur 2.

c) Skriv ned hvordan du ville få GeoGebra CAS til å regne ut forholdet $\frac{T_1}{T_2}$.

a) Vi definerer først funksjonen og punktene ut fra oppgavens opplysninger:

1	f(x):=a x^2+b x+c $\rightarrow\ f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$
2	P:=(p,f(p)) $\rightarrow\ P := \left(p, a\,p^2 + b\,p + c\right)$
3	Q:=(q,f(q)) $\rightarrow\ Q := \left(q, a\,q^2 + b\,q + c\right)$
4	r:=(p+q)/2 $\rightarrow\ r := \frac{1}{2}\,(p+q)$
5	R:=(r,f(r)) $\rightarrow\ R := \left(\frac{p+q}{2}, \frac{a\,p^2 + 2\,a\,p\,q + a\,q^2 + 2\,b\,p + 2\,b\,q + 4\,c}{4}\right)$

Vi definerer en linje $l_{pq}(x)$ som funksjon av x, finner arealet som integral og faktoriserer:

6	l_{pq}(x):=Linje[P, Q] $\rightarrow\ l_{pq}(x) := x\,(a\,p + a\,q + b) - a\,p\,q + c$
7	T_1:=IntegralMellom[f, l_{pq}, p, q] $\rightarrow\ T_1 := \frac{1}{6}\,a\,p^3 - \frac{1}{2}\,a\,p^2\,q + \frac{1}{2}\,a\,p\,q^2 - \frac{1}{6}\,a\,q^3$
8	Faktoriser[$7] $\rightarrow\ (p-q)^3 \cdot \frac{a}{6}$

b) Her trenger vi to linjer til; $l_{pr}(x)$ og $l_{rq}(x)$, før vi regner ut arealet:

9	l_{pr}(x):=Linje[P, R] $\rightarrow \ l_{pr}(x) := -\frac{1}{2}\ a\,p^2 + x\left(\frac{3}{2}\ a\,p + \frac{1}{2}\ a\,q + b\right) - \frac{1}{2}\ a\,p\,q + c$
10	l_{rq}(x):=Linje[R, Q] $\rightarrow \ l_{rq}(x) := -\frac{1}{2}\ a\,q^2 + x\left(\frac{1}{2}\ a\,p + \frac{3}{2}\ a\,q + b\right) - \frac{1}{2}\ a\,p\,q + c$
11	T_2:=IntegralMellom[l_{pr}, l_{pq}, p, r]+IntegralMellom[l_{rq}, l_{pq}, r, q] $\rightarrow \ T_2 := \frac{1}{8}\ a\,p^3 - \frac{1}{8}\ a\,q^3 + \frac{3}{8}\ a\,p\,q^2 - \frac{3}{8}\ a\,p^2\,q$
12	Faktoriser[$11] $\rightarrow \ (p-q)^3 \cdot \frac{a}{8}$

c) Og til slutt forholdet $\frac{T_1}{T_2}$, som først ble funnet av Arkimedes:

13	T_1/T_2 $\rightarrow \ \frac{4}{3}$