R2 - Kapittel 5.1 - 5.4: Integraler

Alle oppgaver skal gjøres ved regning!

I

Finn integralene:

a) $\int (x - \frac{1}{x^3})dx$ b) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int x \ln x \, dx$

d) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ e) $\int \frac{1}{x^2-1}dx$ f) $\int \frac{x^2}{x^2-1}dx$

a) $\int (x - \frac{1}{x^3})dx = \int (x - x^{-3})dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C =$
$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^{-2} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} + C$
(Eventuelt: $\frac{x^4+1}{2x^2} + C$)

b) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}dx = 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 4\sqrt{x} + C$

c) Delvis integrasjon:
$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx + C = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx + C =$
$\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$

d) Variabelskifte: $u = \cos x$, $\frac{du}{dx} = -\sin x \Leftrightarrow dx = -\frac{du}{\sin x}$
$\int \frac{\sin x}{u^3}(-\frac{1}{\sin x})du = -\int u^{-3}du = -\frac{u^{-3+1}}{-3+1} + C =$
$\frac{u^{-2}}{2} + C = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x} + C$

Eller:
$I = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \int \tan x \frac{1}{\cos^2 x}dx$
Variabelskifte: $u = \tan x$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow dx = \cos^2 x du$
$I = \int u \frac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x du = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

Ser ut som det er et annet svar, men
$\frac{1}{2}\tan^2 x + C = \frac{1}{2}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} + C = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}1 + C =$
$\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x} + C_2$ (Ny konstant.)

e) $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$
Delbrøkoppspaltningen gir: $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$
$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C =$
$\ln\sqrt{x-1} - \ln\sqrt{x+1} + C = \ln\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + C = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$

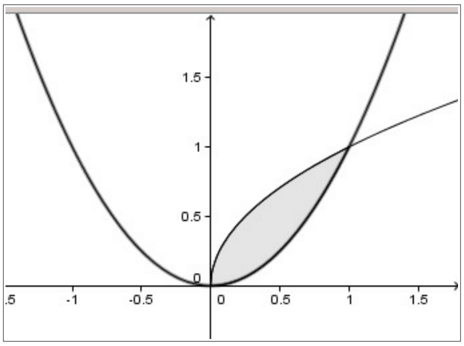
f) $\int \frac{x^2}{x^2-1}dx = \int (1 + \frac{1}{x^2-1})dx =$ (Polynomdivisjon)
$x + \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$ (Se e)!)

II

a) Finn arealet avgrenset av $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ og x –aksen.
b) Finn arealet avgrenset av $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Skjæring med x –aksen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$
$x = 1 \vee x = 3$
Areal: $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = {}_1^3\left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right] =$
$-\frac{27}{3} + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 3 - (-\frac{1}{3} + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = \frac{4}{3}$

b) Skjæring: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0 \vee x = 1$



Areal: $\int_0^1 (g(x) - f(x))dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)dx =$
${}_0^1\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right] = {}_0^1\left[\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 - \frac{1}{3}x^3\right] =$
$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - (0 - 0) = \frac{1}{3}$

III

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{e^x}{x}$

a) Vis at $f'(x) = e^x \frac{x-1}{x^2}$

b) Finn det bestemte integralet $\int_2^3 e^x \frac{x-1}{x^2} dx$

a) Brøkregel: $f'(x) = \frac{e^x x - e^x 1}{x^2} = e^x \frac{x-1}{x^2}$ *QED*

b) $\int_2^3 e^x \frac{x-1}{x^2} dx = {}_2^3\left[\frac{e^x}{x}\right] = \frac{e^3}{3} - \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{3}(e - \frac{3}{2}) \approx 3.00$

IV

En bedrift produserer idag 40000 duppeditter i måneden. Om x måneder er produksjonsmengden $p(x)$ i enheter/måned beregnet å være:
$p(x) = 40000 + 3000x + 8000\sin(\frac{\pi}{3}x)$ [Enheter/måned], $x \in [0, 36]$ [måneder]

a) Finn total produksjonsmengde de nærmeste tre årene.

b) Hva blir gjennomsnittlig produksjonsmengde i disse tre årene?

a)

Total produksjonsmengde:

$T = \int_0^{3\cdot 12} p(x)dx = \int_0^{36} (40000 + 3000x + 8000\sin(\frac{\pi}{3}x))dx =$

${}_0^{36}[40000x + 1500x^2 - 8000\frac{\cos(\frac{\pi}{3}x)}{\frac{\pi}{3}}] =$

$40000 \cdot 36 + 1500 \cdot 36^2 - 8000 \cdot \frac{3}{\pi}\cos(12\pi) - (0 + 0 - 8000\frac{3}{\pi}1) =$

$3384\,000$ [enheter]

b) Gjennomsnittlig produksjonsmengde:

$G = \frac{T}{36} = \frac{3384000}{36} = 94\,000$ [enheter/måned]

(Gjennomsnitt av kontinuerlige funksjoner i et intervall $[a, b]$ er altså:

$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$)